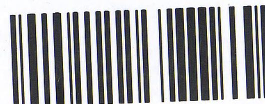
Fabiani



Wykłady uniwersyteckie.

MECHANIKA

według wykładów
Prof. M. SMOLUCHOWSKIEGO
w Uniwersytecie lwowskim
roku akd. 1911/12.



LWÓW
Nakładem KÓŁKA MATEMAT-FIZYCZNEGO.


INSTYTUT FIZYKI UJ
BIBLIOTEKA
KRAKÓW

Wstęp.

Historyczne uwagi.

Mechanikę uważa się zwykle za podstawę fizyki teoretycznej i od niej się zazwyczaj naukę fizyki zaczyna. Istotnie we wszystkich dziedzinach fizyki napotykamy pojęcia mechaniki (np. pojęcie siły, potencyału, energii itd), w całej fizyce używamy systemu zasadniczego dla mechaniki [c g s], z którego możemy wyprowadzić wszystkie inne. Ogółem prawie całą fizykę można przedstawić z punktu widzenia mechaniki. Istotnie tedy zdawałoby się, że mechanika jest podstawą fizyki teoretycznej. Pogląd taki nazywa się w filozofii materyalistycznym. Wyznaje go np. Buchner w dziele: Kraft u. Stoff, twierdząc, że wszystkie wogóle zjawiska przyrody dają się pojąć jako zjawiska ruchu cząstek materyalnych.

Dziś jednak pogląd ten porzucony; można wprawdzie zjawiska fizyczne tłumaczyć prawami mechaniki – atoli wytworzony w nowych czasach pogląd tzw. elektryczny wyjaśniający zjawiska elektroniczne przemawia nam więcej do przekonania. Istnieje jeszcze trzeci system tzw. energistyczny mający jeszcze dziś zwolenników zwłaszcza w termodynamice. Z tych trzech poglądów jest obecnie ów elektryczny w modzie.

Skąd pochodzi dominująca rola mechaniki w fizyce? Powody tego są historyczne, które może się dadzą uzasadnić psychologicznie, bo zjawiska mechaniczne najłatwiej i najwcześniej zdają się być zrozumiałemi; nadto do poznawania zjawisk mechanicznych mamy dwa zmysły: wzrokowy i mięśniowy, podczas gdy do poznania innych zjawisk np. optycznych jeden tylko: wzrokowy, do poznania zjawisk ciepła – jeden zmysł temperatury, – zjawisk elektrycznych żadnego właściwie.

Już w starożytności mieli filozofowie zwłaszcza greccy, ponieköd rzymscy, pewne wiadomości z dziedziny statyki. Posługiwali się oni wyłącznie prawie kalkulacją w celu poznania zjawisk fizycznych; stąd oczywiście nie mogli wyjść poza statykę. Archimedes miał już wiadomości poniekąd systema=

tyczne, obliczał już np. środek ciężkości odcinka paraboli. Co do dynamiki mieli atoli starożytni pojęcia naiwne i błędne. Arystoteles dzieli np. ruchy na gwałtowne czyli wbrew naturze - do takich zalicza rzucanie - i na zgodne z naturą - np. spadanie ciał. Według niego ciało rzucone leci prostolinijnie, a potem nagle spada na ziemię. Dalej pojęcia co do ciał lekkich i ciężkich są u nich mylne.

Średnie wieki były stracone dla nauki fizyki.

Dopiero za czasów renesansu znowu się jej wzrost zaczyna. I tak u Leonarda da Vinci (1452 - 1519) w jego traktacie o maszynach spotykamy ciekawe uwagi o mechanice, ogłoszone dopiero przez Galileusza (1564-1642), który w swem dziele: „Discorsi et demonstrationi" dochodzi częścią spekulacyą, częścią doświadczeniem do praw o współdziałaniu sił i o bezwładności. Właściwym twórcą jednak mechaniki jest Newton (1642-1711) przez owe słynne tres leges motus x) w dziele „Philosophiae naturalis principia math." Jemu zawdzięczamy ujęcie praw mechaniki w równania i rzewnętrzną metodę. Współcześnie z Newtonem żyje Huyghens, który w swem „Chronologium oscylatoryum" zajmuje się wahadłem. Prawami Newtona w zastosowaniu do szczególnych wypadków zaj-

x) p. str. 45.

1717 – 1783

mują się rodzina Bernoullich dalej D'Alembert i inni.
Daleko ogólniejsze ujęcie matematyczne praw mechaniki
1736 – 1813
daje Lagrange w dziele: „Mécanique analytique" w 2
wydaniach 1788 i 1811 r.; wprowadza on zasadę prac przy-
gotowanych i swe słynne równania. Szczycił się on tem,
że w całem dziele obszedł się bez jednej figury geometrycznej.
Jest to wprawdzie ciekawe, lecz w nowszych czasach uważa-
my, że pojęcia geometryczne ułatwiają nam badania. Metodą
geometryczną posługiwał się równocześnie z Lagrangem
żyjący Poinsot. Dalej Hamilton, Jacobi, Gauss, Hertz
starali się ująć mechanikę w odmiennej formie, zwłasz-
cza Hertz w sposób najściślejszy pod względem logicznym.
W ostatnich wreszcie latach zjawiły się nowe rewolucyjne
myśli, odrywające się od zasad Newtona. Zachodzi wątpli-
wość czy równania Newtona są całkiem słuszne. Podstawę
do tej wątpliwości dają zjawiska elektromagnetyczne. Z tego
nowego punktu widzenia uważamy prawa Newtona za
ogromne przybliżenie tak ogromne, że nigdy prawdopo-
dobnie nie zajdzie wypadek, by się nie spełniły – ale teore-
tycznie uwzględniamy przecież tę okoliczność, że to są
przybliżenia.

Działy mechaniki.

Mechanikę dzielimy ze względu na stopień przybliżenia oraz z powodów dydaktycznych na mechanikę punktów, mechanikę ciał sztywnych i mechanikę ciał sprężystych (odkształcających się). Np. gdy chodzi o ruch planet około słońca, to możemy ten ruch uważać za ruch punktów, o ile nam chodzi o pierwsze przybliżenie; w porównaniu wielkich odległości tych ciał od siebie z ich wielkością i kształtem możemy te ostatnie pominąć. Więcej punktów takich wziętych pod uwagę stanowi system punktów. Gdy rozważamy ruch jednej z tych planet np. ziemi, uwzględnimy jej ruch obrotowy, precesyę, więc weźmiemy pod uwagę bryłę o pewnym kształcie, to już będziemy mieli do czynienia z mechaniką ciał sztywnych. Gdy wreszcie uwzględnimy wpływ odkształceń np. przypływ i odpływ na ruch ziemi itd, to już osiągniemy trzeci stopień dokładności mechaniki ciał sprężystych.

Również dzielą mechanikę na statykę i dynamikę (starożwiecki podział). Statyka to specyalny wypadek dynamiki, gdy prędkość równa jest zeru. Uważano ją przedtem za dział geometryi; wchodzi tam jednak prócz wielkości przestrzennych jeszcze pojęcie masy i siły.

Jeszcze jest inny podział na kinematykę i kinetykę (dynamikę). Kinematyka dotyczy ruchów ciał bez względu na siłę; operuje więc pojęciami przestrzeni i czasu. W dynamice czyli kinetyce przychodzi jeszcze pojęcie masy lub siły (wychodzi to na jedno). Kinematyka jest zbliżona do geometryi; wchodzi tylko jeszcze pojęcie czasu. Kinetyka zawiera już pojęcie masy jest więc już nauką empiryczną. Zadania mechaniki rozpadają się zwykle na dwie części: kinematykę i kinetykę. My zaczniemy od mechaniki punktu i kinematyki.

Rachunek wektorowy.

Zanim przystąpimy do właściwego przedmiotu, musimy się zaznajomić z zasadami rachunku wektorowego. Wprawdzie używana jest jeszcze powszechnie we fizyce metoda geometryi analitycznej, jednak niedawno wprowadzony rachunek wektorowy daje się częstokroć bardzo dobrze ze względu na krótkość i jasność stosować do najtrudniejszych nawet zagadnień fizyki. Rozumiemy przez rachunek wektorowy pewien sposób symboliki i operacyi ułatwiających rozumowanie nad wielkościami przestrzennemi. Początki rachunku wektorowego pochodzą od

Grassmana (1847 „Linealausdehnungslehre", 2^{gie} wyd 1862.)
Dzieło jego nie zwróciło jednak uwagi na się i niezależnie tedy od Grassmana wprowadził Hamilton swoje kwaterniony, wielkości zbliżone do wektorów, posiadające atoli 4 jednostek*)
Definicya kwaternionów jest również bardzo abstrakcyjną, lecz rachunek niemi doprowadza z zadziwiającą łatwością do rozwiązań zagadnień nieraz bardzo zawiłych w sposób zwykły w geometryi i mechanice. Rachunek ten uprościł Heaviside w latach 90 przez odrzucenie jednej z jednostek. Stosowano go początkowo przedewszystkiem w elektryczności. Jednym z pierwszych wykładających go był pr. Smoluchowski we Wiedniu. Do rozszerzenia się go przyczynił się wiele pr. Föppl, który go też używa w wybornem swem dziele „Technische Mechanik."
Literatura: Laub (polsk) Zarys rachunku wekt.; Valentiner: Vektoranalysis; Bucherer; Jens; Ignatowski; Jahnke; Silberstein (o elektr-magnet).

Wektorem nazywamy wielkość, która ma nie tylko wymiar bezwzględny ale także kierunek. Takie wielkości wektorowe w fizyce są np: prędkość, siła mechaniczna, elektryczna, przyspieszenie itp. W przeciwstawieniu do tego są wielkości,

*) Arytm. teorya kwaternionów przez W. Sierpińskiego. Nakładem Kółka mat-fiz. we Lwowie.

które nie mają kierunku w przestrzeni; są to tzw. wielkości skalarne np: masa, gęstość, temperatura, praca, energia, potencyał i t.p.

Do określenia kierunku wektora w przestrzeni potrzeba dwu kątów albo trzy rzuty wektora na osie układu, do określenia zaś jego oryentacyi trzeba jeszcze podać strzałkę (Niemcy mają na określenie tego, co my nazwaliśmy oryentacyą, wyraz: Sinn des Vektors, w odróżnieniu do Richtung d.V.; w polskim języku jest tu wyraz kierunek w obu tych znaczeniach używany). Wielkość wektora określa liczba dana.

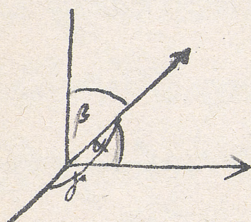


Fig 1.

Wielkości wektorowe oznacza się różnymi sposobami; my na ich oznaczenie będziemy używać liter gotyckich:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$$

w przeciwieństwie do wielkości skalarnych, które znaczyć będziemy literami łacińskiemi:

$$a, b, c, d, \ldots$$

W matematyce wolno nam wprowadzać dowolne symbole; trzeba tylko określić dla nich operacye (konwencye) tak by nie zawierały sprzeczności. Zawrzemy więc takie umowy dla wektorów i określimy dla nich: znak równości, dodawanie, odejmowanie i mnożenie:

I. Dwa wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są wtedy i wtedy tylko równe, jeśli

charakterystyczne cechy wektorów są tesame, a więc jeśli jest równa długość przesunięć i identyczne kierunki oraz strzałki. Innemi słowy, powiemy, dwa wektory a i b są równe, jeśli się mogą wzajemnie pokryć przez przesunięcie równoległe. Równość tedy dwu wektorów reprezentuje nam trzy równania.

Fig 2

Jeśli dwa wektory mają tylko długości i kierunki równe, strzałki zaś przeciwnie skierowane, zaznaczamy to znakami: $a, -a$.

Fig 3

II. Sumą dwu wektorów a i b nazywamy trzeci wektor c, który otrzymujemy przez kolejne wykonanie przesunięć wektora a potem w jego końcu wektora b i znaczymy to:

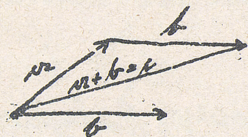


Fig 4

$$a + b = c$$

Innemi słowy: trzeci bok trójkąta jest sumą dwu innych. Dodawanie tak określone, nazywamy je geometrycznem, jest konwencją; powód formalny takiej nazwy jest ten, że ważne są tu prawa algebry: przemienności

$$a + b = b + a$$

i dla trzech wektorów prawo łączności:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

jak to łatwo stwierdzić na podstawie definicji. Prawo dodawania można łatwo uogólnić na jakąkolwiek byle skończoną liczbę wektorów. Dodawanie geometryczne ma zastosowanie w składaniu prędkości, sił, przyspieszeń itd. (Zauważymy jeszcze że początek współrzędnych nie potrzebuje dla wektora być określony). Wysnujemy teraz z definicji dodawania wnioski: Suma n wektorów równych $\mathfrak{a}$ daje znowu wektor:

$$\underbrace{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\dots+\mathfrak{a}}_{n} = n\,\mathfrak{a}.$$

Stąd: można każdy wektor uważać za wielokrotność wektora jednostkowego. Możemy to zapisać:

$$\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{U} = T\mathfrak{a}.\,U\mathfrak{a}$$

gdzie $\mathfrak{U}$ lub $U\mathfrak{a}$ oznacza wektor jednostkowy; podaje on nam kierunek i strzałkę i nazywamy go przeto versorem; a lub $T\mathfrak{a}$ podaje nam miarę bezwzględną wektora $\mathfrak{a}$, i nazywamy te znaki tensorem.

Na szczególną uwagę zasługują wektory jednostkowe w trzech kierunkach przestrzeni. Znaczymy je stale:

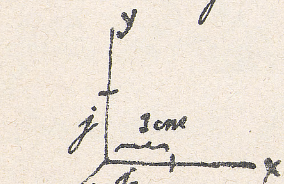


Fig 5.

$$\mathfrak{i},\ \mathfrak{j},\ \mathfrak{k}.$$

Chcąc wyrazić jakikolwiek wektor $\mathfrak{v}$ przez owe trzy wektory jednostkowe, wystarczy uczynić trzy rzuty wektora $\mathfrak{v}$ na osie układu prostokątnego, oznaczyć wartości bez-

względne x, y, z i zauważę, że r przedstawia sumę geometryczną dwóch wektorów:

$$r = ix + jy + kz.$$

Wartość bezwzględna takiego wektora r jest, jak łatwo widzieć:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Mając dwa wektory: $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

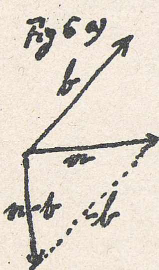
$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

powiemy, że są one równe, jeśli

$$a_1 = b_1 \; ; \; a_2 = b_2 \; , \; a_3 = b_3$$

Widać stąd, że rachunek wektorowy upraszcza geometryę analityczną zastępując jednem równaniem trzy równania tejże.

III. Definicyę odejmowania wyprowadzamy z definicyi dodawania kładąc:



b)

a) $a - b = a + (-b)$

b) $b - a = b + (-a)$

Powyższe definicye dodawania i odejmowania pochodzą od Grassmanna. Od dawna atoli znany jest ich szczególny przypadek w przedstawianiu wielkości zespolonych.

Na iloczyn mamy w rachunku wektorowym dwie istotnie różne definicye tj iloczynu skalarnego i wektorowego.

IV. Iloczyn skalarny, czyli, jak go Grassmann nazwał, wewnętrzny określamy następującą równością:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = S\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a\,b\cos(\measuredangle\,\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

Ważne dlań jest prawo przemienności (nie jest to już wektor).

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = ab\cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = ba\cos(\measuredangle\,\mathfrak{b}\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

oraz prawo rozdzielności:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

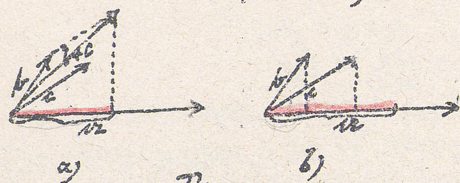


Fig 7.

Lewą stronę równości tej przedstawia Fig 7. a) prawą b).

W algebrze mamy jeszcze prawo łączności iloczynu a.b.c; tu prawo to niema zastosowania.

Jako wniosek określenia mnożenia skalarnego dostajemy na iloczyn wektorów prostopadłych $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0 \quad , \text{bo } \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Równość powyższa jest zarazem kryterjum prostopadłości dwu wektorów.

Stosując definicję iloczynu skalarnego do wektorów jednostkowych i, j, k dostajemy:

$(i\,i) = 1.1 \cos 0 = 1,\ (j\,j) = 1\ ,\ (k\,k) = 1$

wogóle $(a \cdot a) = a^2 = a^2$, natomiast:

$(i\,j) = 1.1 \cos 90 = (i\,k) = (j\,k) = 0$

Wobec tego iloczyn skalarny dwu wektorów:

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad \text{oraz}$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \quad \text{przedstawi się:}$$

$$(a \cdot b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Zastosowując określenie iloczynu skalarnego do dwu dowolnych wektorów jednostkowych a i b zamykających kąt ε dostajemy w prosty sposób wzór znany w geometryi analit.:

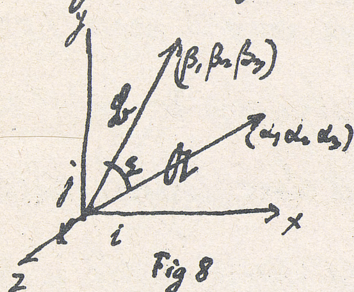


Fig 8

$$a\,b = \cos \varepsilon = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3 ,$$

gdzie $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$ oznaczają kąty jakie wektory a, b tworzą z osiami układu.

Można tu też w sposób całkiem prosty wyprowadzić wzór Carnota:

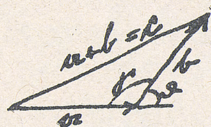


Fig 9

$$(a + b)^2 = a^2 + 2(a \cdot b) + b^2 \quad \text{czyli}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\vartheta \quad \text{lub}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

V. Iloczyn wektorowy czyli jak go Grassmann nazywa zewnętrzny: $[\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}] = V \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ określamy w następujący sposób: jest to nowy wektor, którego wielkość bezwzględna wynosi: $a\, b \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, kierunek zaś jest $\mathfrak{C}$ prostopadły do kierunków wektorów $\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}$ i tworzący z nimi system tzw. „praworęczny" i piszemy to:

$$[\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}] = a\, b \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\, \mathfrak{C}$$

Wyjaśnić należy jeszcze, co rozumiemy przez słowo system „praworęczny". Wyobraźmy sobie układ np. prostokątny w przestrzeni tak, jak to przedstawia Fig 10., gdzie narysowane osie są dodatniemi. Przez obrót około punktu 0 dodatnia oś $x^{ów}$ może przejść w dodatnią oś $y^{ów}$, a następnie w dodatnią oś $z^{tów}$. Wszelki układ trzech wektorów, o dowolnych kierunkach, będziemy nazywali praworęcznym, jeśli w sposób ciągły przez obrót, każdy z wektorów będzie mógł w tym samym sensie, jak w naszym wypadku szczegółowym, przechodzić kolejno w dwa pozostałe. Dla łatwiejszego pamiętania i oryentowania się podamy jeszcze określenie tego systemu zapomocą ruchu ręki przy wkorkowywaniu korkociągu praworęcznego (lub śruby prawoskrętnej).

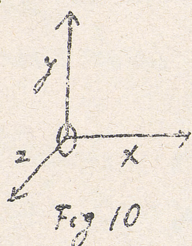


Fig 10

System praworęczny jest to taki układ trzech wektorów, dowolnie do siebie nachylonych iż, gdy w punkcie ich początkowym umieścimy prawą rękę zwróconą palcami w kierunku strzałki jednego z nich, to przy skręceniu ręki używanem dla wkorkowania korkociągu praworęcznego, pozostały wektor przechodzi ciągłym obrotem w trzeci. System praworęczny jest używany w Anglii, stąd zowią go też „angielskim." Znany on jest również pod nazwą „chmielowego" bo tak wije się chmiel około swej podpórki. Jest jeszcze w użyciu system „leworęczny", lub „francuski" lub „winny". My używać będziemy systemu praworęcznego.

Wracając obecnie do definicyi iloczynu wektorowego, dochodzimy na podstawie powyższego określenia systemu praworęcznego do wniosku, że np. iloczyn wektorowy wektorów $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$

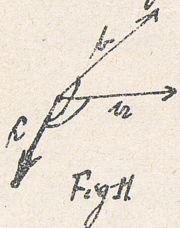


Fig 11

(Fig 11) będąc wektorem prostopadłym do płaszczyzny przesuniętej przez kierunki $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ będzie strzałką ku nam zwrócony. Iloczyn natomiast wektorowy $[\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$ przedstawia wektor co do wielkości bezwzględnej równy poprzedniemu, strzałką jednak skierowany wręcz przeciwnie. Stąd

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$$

Niema więc dla iloczynu wektorowego prawa przemienności; ważne natomiast jest dlań prawo rozdzielności tj:

$$[\mathfrak{A}(b+c)] = [\mathfrak{A}b] + [\mathfrak{A}c]$$

Dowód na to przeprowadza się na mocy definicyi. Równość powyższa jest równoważna z równością:

$$a[\mathfrak{A}(b+c)] = a[\mathfrak{A}b] + a[\mathfrak{A}c],$$

gdzie a oznacza tensor zaś $\mathfrak{A}$ wersor. Co do wartości bezwzględnej jest ta równość oczywista,

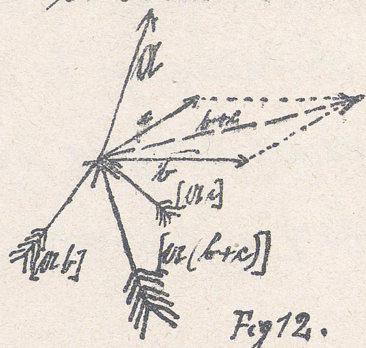
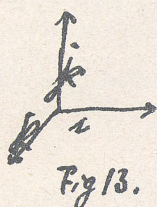


Fig 12.

co do kierunku zaś strzałki, rozważajmy z osobna stronę lewą i prawą przypuszczalnej równości i przekonajmy się, czy kierunki się nakryją, drogą geometryczną. Wektor $[\mathfrak{A}(b+c)]$ jest skierowany prostopadle do płaszczyzny poprowadzonej przez $\mathfrak{A}$ i $b+c$ od patrzącego na rycinę. (Fig 12). Wektor $[\mathfrak{A}b]$ prostopadły do płaszczyzny poprowadzonej przez $\mathfrak{A}$ i b oraz $[\mathfrak{A}c]$ prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez $\mathfrak{A}$ i c są również skierowane strzałką od patrzącego na rycinę. Wektory $[\mathfrak{A}(b+c)]$, $[\mathfrak{A}b]$, $[\mathfrak{A}c]$ jako prostopadłe do wektora $\mathfrak{A}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wektory $b+c$, b, c leżą też w jednej płaszczyźnie. Utwórzmy w myśli ich rzuty na płaszczyznę wektorów poprzednich. Po obrocie o 90° dadzą te

wektory kierunki wektorów $[\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{c}]$. Stąd słuszność naszego powiedzenia.

Jeśli $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ to $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]=0$, jeśli zaś $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]= ab.\mathfrak{c}$.


Fig 13.

Wobec tego: $[i\,i]=0$; $[j\,j]=0$; $[k\,k]=0$

$$[i\,j]=k \qquad [j\,i]=-k$$
$$[j\,k]=i \qquad [k\,j]=-i$$
$$[k\,i]=j \qquad [i\,k]=-j$$

Wyrażając wektory przez wektory składowe, dostaniemy

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]=[a_1 i + a_2 j + a_3 k][b_1 i + b_2 j + b_3 k]=$$
$$= i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Co się tyczy dzielenia, to zauważymy że dzielić można wektory przez wielkości skalarne, uważając tę operacyę jako odwrotną mnożenia wektora przez wielkość skalarną; natomiast dzielenia przez wektor nie określamy. Rozważymy jeszcze dwa następujące składania trzech wektorów:

$$(\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]), \quad [\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]$$

Pierwsze z tych wyrażeń da się łatwo interpretować geometrycz=

nie. Zauważymy przedewszystkiem, że nie będzie ono już wektorem.

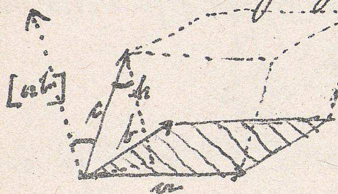


Fig 14.

$[ab] = ab\sin(ab)\,\mathfrak{c}$ przedstawia co do wartości bezwzględnej pole równoległoboka pokreskowanego. Zatem $(c[ab]) = c.ab\sin(ab)\cos(c,[ab])$ przedstawia objętość równoległościanu o wysokości h. Napiszemy więc:

$$(c[ab]) = \check{S}\,cVab = Vol(abc)$$

Do tego samego doszlibyśmy drogą rozpisywania na składowe wektory:

$$[ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2b_3 - b_2a_3) + j(a_3b_1 - b_3a_1) + k(a_1b_2 - b_1a_2)$$

$$(c[ab]) = c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + c_2(a_3b_1 - b_3a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

co przypomina nam znany wzór geometrji analitycznej na objętość równoległościanu

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

którego jeden wierzchołek znajduje się w początku układu prostokątnego zaś, inne zaś określone są współrzędnemi $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$.

Zakładając w szczególności, że

$$(c[a\,b])=0$$

wnioskujemy, że przynajmniej jeden z wektorów jest zerem. Gdy ten wypadek, jako nieciekawy odrzucimy, pozostaje nam wniosek drugi, że wszystkie trzy wektory leżą w jednej płaszczyźnie czyli są komplanarne. Relacja więc

$$(v[a\,b])=0$$

gdzie v przedstawia wektor zmienny oznacza, że wektor v leży w płaszczyźnie wektorów a i b.

Drugie ze wspomnianych wyrażeń $[c[a\,b]]$ rzadziej jest spotykane i niema tak prostego wytłumaczenia geometrycznego. Wyrażenie to będzie już wektorem; postaramy się inaczej je napisać. Z prostego rozważania wynika, że wektor $[c[a\,b]]$ leży w płaszczyźnie poprowadzonej przez wektory a, b. Można tedy każdy z tych wektorów rozłożyć w składowe w kierunkach dwu pozostałych. Można więc

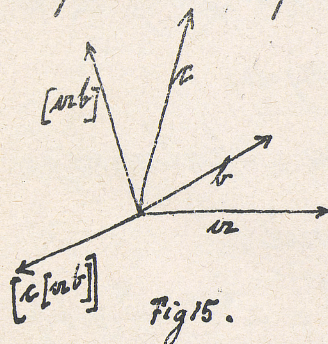


Fig 15.



napisać:
$$[c[a\,b]] = u\,a + v\,b$$
gdzie u i v są narazie nieokreślone. Równanie to zachowa się przez pomnożenie po obu stronach przez jakąkolwiek wiel-

kość, więc np. przez v. Będzie

$$(c[c[ab]]) = u(ca) + v(cb)$$

Lecz wektor $c \perp [c[ab]]$, zatem $(c[c[ab]]) = \rho S c[c[ab]] = 0$, stąd

$$\frac{u}{v} = -\frac{(cb)}{(ca)} \quad \text{czyli}$$

$$u = \alpha(cb) \qquad v = -\alpha(ac)$$

gdzie α jeszcze nie określone. Wstawiając wartości u, v wyżej mamy:

$$[c[ab]] = \alpha\{a(cb) - b(ca)\}$$

Obiór α nie zależy od szczególnego nachylenia do siebie wektorów: c, $[ab]$, a, b; założymy tedy w szczególności: $a = i$, $b = j$, $[ab] = k$, $c = i$. Wobec równości $[i\,k] = -j$ dostaniemy:

$$-j = \alpha\{i.0 - j.1\}$$

zatem $\alpha = 1$. Stąd zaś dostajemy wzór żądany:

$$[c[ab]] = a(cb) - b(ca).$$

Kombinowanie iloczynu wektorowego i skalarnego nasuwa nam jeszcze jedno ciekawe wyrażenie:

$$([ab][ab]) = ([ab])^2 = a^2 b^2 \sin^2(ab)$$

Zakładając $a^2 b^2 = 1$, oraz $\measuredangle(ab) = \measuredangle z$,

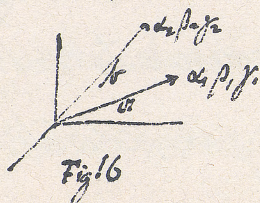


Fig 16

$$a = i\cos\alpha_1 + j\cos\beta_1 + k\cos\gamma_1$$

$$b = i\cos\alpha_2 + j\cos\beta_2 + k\cos\gamma_2$$

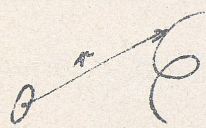
dostajemy wzór:

$$([a.b])^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - b_3 a_1)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$$ czyli

$$\sin^2 \varepsilon = (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1)^2 + (\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1)^2$$

Bardzo prostymi wzorami przedstawiają się w rachunku wektorowym równania linii prostej, krzywej, płaszczyzny w przestrzeni. Niemi się też pokrótce zajmiemy.

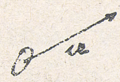
Równanie krzywej wogóle dostaniemy, wyrażając wektor r jako


Fig 17

funkcyę parametru dowolnego s.

$$r = f(s)$$

Jeśli np. a oznacza nam wektor stały o określonym kierunku,


Fig 18.

to równanie prostej, przechodzącej przez początek układu O, w tym danym kierunku, będzie

$$r = x . a$$

gdzie x podaje wielokrotność wektoru a. Gdybyśmy chcieli mieć

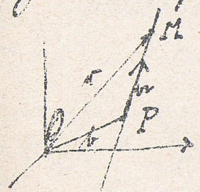


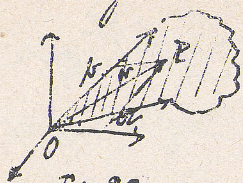
Fig 19.

równanie prostej, przechodzącej przez punkt przestrzeni P w kierunku wektora a, wystarczy zauważyć z rysunku, że:

$$r = b + x a$$

Jest to żądane równanie prostej, a i b oznaczają pewne wektory stałe, zaś x wielkość zmienną niezależną.

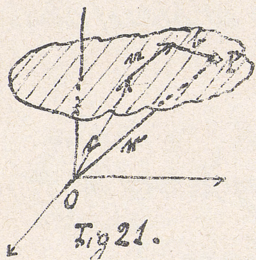
Analogicznie dostaniemy na równanie płaszczyzny przechodzącej


Fig 20.

przez dwa dane wektory a, b, i początek układu 0 wzór:

$$r = ua + vb,$$

gdzie u i v zmienne dowolne. By dostać zaś równanie płaszczyzny nie przechodzącej przez początek układu 0, leżącej


Fig 21.

zaś na wektorach a i b, wystarczy zauważyć z ryc. 21, że

$$r = c + ua + vb.$$

Tem równaniem będzie objęty każdy punkt P żądanej płaszczyzny. Ze wzorów tych łatwo przejść do równań zwykłych geometryi analitycznej, rozkładając wektory na ich składowe w kierunkach x, y, z: Np. w ostatnim równaniu połóżmy:
$$r = ix + jy + kz = ic_1 + jc_2 + kc_3 + u(ia_1 + ja_2 + ka_3) + v(ib_1 + jb_2 + kb_3).$$

Porządkując według i, j, k dostajemy:

$$x = 1.c_1 + ua_1 + vb_1$$
$$y = 1.c_2 + ua_2 + vb_2$$
$$z = 1.c_3 + ua_3 + vb_3$$

Rugując stąd 1., u, v, dostajemy równanie płaszczyzny zwykłe geometryi analitycznej. Ogólny kształt równania płaszczyzny w rachunku wektorowym przedstawia się

$$\mathfrak{r} = \varphi(u, v)$$

gdzie u, v są dwoma parametrami niezależnymi, bo płaszczyzna jest utworem dwuwymiarowym. Równania w tej formie napisane nazywamy wyraźnemi (explicite Vektorgleichungen), w przeciwstawieniu do równań, gdzie $\mathfrak{r}$ nie jest wypisane wyraźnie jako funkcya pozostałych parametrów. Te ostatnie równania nazywamy niewyraźnemi (implicite Vektorgleichung). Przykłady takich równań mieliśmy już: powiedzieliśmy, że

$$(\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}) = 0$$

znaczy, że wektor $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$. Załóżmy, że $\mathfrak{b}$ jest wektorem zmiennym i naznaczmy go: $\mathfrak{r}$. Dostaniemy równanie płaszczyzny

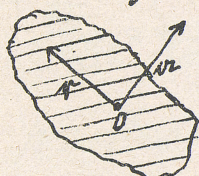


Fig 22

$$(\mathfrak{a}\, \mathfrak{r}) = 0$$

przechodzącej przez 0 i prostopadłej do $\mathfrak{a}$. Gdybyśmy chcieli dostać równanie płaszczyzny nie przechodzącej przez początek układu 0, lecz ogólne, trzeba na miejsce $\mathfrak{r}$ wstawić $\overline{MP} = \mathfrak{b} - \mathfrak{r}$

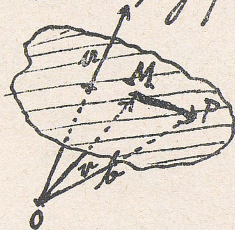


Fig 23

$$(\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} - \mathfrak{r})) = 0 .$$

Wykonując ów iloczyn skalarny, mamy:

$$(\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\, \mathfrak{r}) = m \quad \text{liczba skalarna. Zatem}$$

$$(\mathfrak{a}\, \mathfrak{r}) = m$$

przedstawia najogólniejszą formę równania płaszczyzny. Rozpisując je, mamy:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = m$$

$$\frac{x}{\left(\frac{m}{a_1}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{m}{a_2}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{m}{a_3}\right)} = 1$$

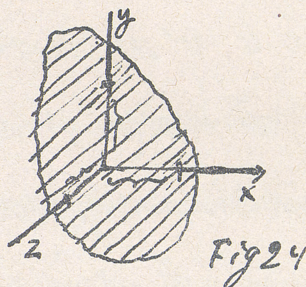


Fig 24

równanie odcinkowe płaszczyzny.

Wiemy również, że:

$$[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}] = 0$$

oznacza że wektor $\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{a}$. Jest to zatem równanie prostej przechodzącej przez 0 i równoległej do $\mathfrak{a}$.

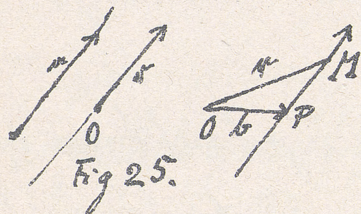


Fig 25.

Równanie prostej ogólne dostaniemy zastępując $\mathfrak{r}$ przez $\mathfrak{r} - \mathfrak{b} = \overline{PM}$.

$$[(\mathfrak{r} - \mathfrak{b})\,\mathfrak{a}] = 0$$

Stąd $\quad [\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}] = [\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}]$ lub

$$[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}] = \mathfrak{C}$$

ogólne równanie prostej wiektorowe. Da się ono znowu przez rozpisanie sprowadzić do formy Kartezyuszowskiej:

$$[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{i}\,c_1 + \mathfrak{j}\,c_2 + \mathfrak{k}\,c_3$$

Skąd

$$a_3 y - a_2 z = c_1$$
$$a_1 z - a_3 x = c_2$$
$$a_2 x - a_1 y = c_3$$

skąd przez rugowanie dochodzimy do równania prostej we współrzędnych punktu x, y, z.

Jeszcze damy przykład zastosowania rachunku wektorowego do krzywych przestrzennych. Krzywa przestrzenna przedstawi się równaniem:

$$r = \varphi(u)$$

gdzie u jest parametrem zmiennym.

Dla $u + du$ będzie

$$r + dr = \varphi(u + du) \quad , \text{skąd}$$

$$dr = \varphi(u + du) - \varphi(u)$$

Fig 26.

Stąd dostajemy już wprost równanie stycznej do krzywej przestrzennej. Niech dla pewnego u_0, wektor r staje się r_0. Dla takiego punktu krzywej równanie jej stycznej będzie:

$$[(r - r_0)\, dr] = 0$$

Równanie płaszczyzny normalnej dostaniemy, gdy żądamy by $(r - r_0) \perp dr$. Zadość uczyni się temu warunkowi równaniem:

$$((r - r_0)\, dr) = 0$$

Jest to więc równanie płaszczyzny normalnej przechodzącej przez pewien punkt krzywej.

Jeżeli przez trzy punkty przestrzeni poprowadzimy płasz-

czyznę, to to wychodzi na jedno, gdybyśmy powiedzieli, że prowadzimy płaszczyznę przez dwa wektory przechodzące przez owe punkty. Płaszczyznę taką nazywamy ścisłestyczną. Z poprzedniego wiemy, że równość $(c[ab])=0$ znaczy, że wszystkie trzy wektory leżą w jednej płaszczyźnie. Zrobimy z tego zastosowanie. Z równania krzywej $r=\varphi(u)$ i z fig 27. mamy:

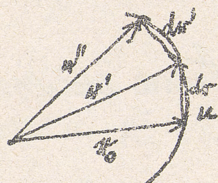


Fig 27.

$$r' = r + dr = \varphi(u+du) = r + \varphi'(u)du$$

$$r'' = r' + dr' = r' + d^2r = r + \varphi''(u)du^2$$

Równanie:

$$((r - r_0)[dr\, d^2r]) = 0$$

oznacza, że wektor $r-r_0$ leży w płaszczyźnie wektorów dr i d^2r czyli równanie to określa nam płaszczyznę ścisłestyczną, przechodzącą więc przez dwa wektory dr, d^2r, czyli przez trzy punkty krzywej.

Prostopadła w punkcie krzywej do płaszczyzny ścisłestycznej (czyli prostopadła do dwu sąsiednich stycznych krzywej) zowie się binormalną. Jeśli zaznaczymy, że symbol $U[ab]=0$ oznacza nam wektor prostopadły do obu wektorów a i b, to

$$N = U[dr\, d^2r]$$

oznaczać nam będzie kierunek normalnej. Prosta prostopadła w punkcie krzywej do jej stycznej i binormalnej nazywa

się normalną główną. Postugując się tem samem znakowaniem co wyżej, naznaczymy jej kierunek:

$$N_g = U[N dr] = U[dr[dr\, d^2r]].$$

Przykład. Jako przykład numeryczny możnaby uważać krzywą śrubową, utworzoną na pobocznicy walca przez punkt koła obracającego się około osi przez jego środek przechodzącej, wzdłuż której koło się posuwa. Równanie takiej krzywej będzie:



Fig 28.

$$r = ix + jy + kz$$

w którem, jeśli a oznacza promień koła, a α kąt zawarty między osią $x^{ów}$ a promieniem łączącym punkt krzywej z punktem osi, jest

$$x = a\cos\alpha\,, \quad z = a\sin\alpha\,,$$

Zakładając na kąt α zmienną wartość βy, dostaniemy owo równanie w formie:

$$r = i\,a\cos(\beta y) + jy + k\,a\sin(\beta y).$$

Ma więc to równanie kształt ogólny $r = \varphi(y)$. Chcąc np. obliczyć równanie stycznej, utworzymy:

$dr = (-i\,a\beta\sin(\beta y) + j + k\,a\beta\cos(\beta y))dy$ i wstawiwszy to w równanie ogólne stycznej. Będzie więc styczna tej krzywej:

$$[(r - r_0)(-i\,a\beta\sin\beta y_0 + j + k\,a\beta\cos\beta y_0)dy] = 0$$

Analogicznie wyprowadzilibyśmy wzory na płaszczyznę normalną, ścisłestyczną, binormalną, normalną główną, w co już nie wchodzimy. Zauważymy tylko, że o ile wygodnym był rachunek wektorowy w ogólnych rozważaniach, to w szczegółowem obliczaniu sprawy nie ułatwia.

Jeszcze rozważymy wypadek, gdy wektor r jest przedstawiony jako funkcya długości łuku s.

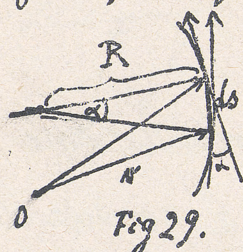


Fig 29.

$$r = f(s) \quad \text{Stąd}$$

$$dr = f'(s)ds$$

$$\frac{dr}{ds} = f'(s) = \tau(s) = \text{wektor jednostkowy}$$

w kierunku stycznej (jest to bowiem stosunek wektora do długości łuku). Wyobraźmy sobie takie dwa kolejne wektory jednostkowe

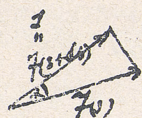


Fig 30.

$$\tau(s), \quad \tau(s+ds).$$

$$\tau(s+ds) - \tau(s) = d\tau$$

$$\frac{\tau(s+ds) - \tau(s)}{ds} = \frac{d\tau}{ds}$$

Jeśli $|d\tau|$ oznacza nam wartość bezwzględną, R promień krzywizny (Fig 29) to: $|d\tau| : ds = 1 : R$. Stąd krzywizna

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|$$

(Znaczenie 2^giej^ pochodnej). Rozważania te znajdą zastosowanie przy sile odśrodkowej. Na tem kończymy na razie

zajmowanie się rachunkiem wektorowym, pozostawiając sobie uzupełnienie go w zastosowaniach fizycznych w stosownych miejscach później i przystępujemy już do zagadnień mechaniki.

Kinematyka punktu.

Kinematyka zajmuje się, jak już wyżej powiedzieliśmy, rozpatrywaniem ruchu tj. zmiennością położenia punktu w czasie bez względu na siłę (masę ciała). Aby ruch opisać musimy mieć dane położenie punktu w poszczególnych chwilach czasu. Położenie atoli punktu możemy określić tylko przez odniesienie do innych utworów przestrzennych. Napotykamy tedy zaraz na początku na bardzo ważną <u>kwestyę względności</u>, dotyczącą ustalenia układu odniesienia. Jeślibyśmy nie wchodzili w logiczną stronę naszych równań ruchu, to moglibyśmy sobie pomyśleć taki układ gdziekolwiek na ziemi lub na jakiej gwieździe ustalony. W obrębie laboratoryum mogłyby nawet uzyskane prawa okazać się ważnemi, lecz już dla zjawisk, w które ruchy ziemi lub gwiazdy wchodzą (np. zj. Foucolta) będą równania

nieważne. Starano się przedtem w inny sposób trudność tę usunąć; oto konstruowano sobie układ w przestrzeni tj. w eterze i rozpatrywano tędy ruchy względem eteru, który uważano za Lorentzem za niezmienny. Sądzono, że aberacya światła daje nam ruchy względem eteru. Przekonano się atoli, że to jest tylko aberacya gwiazd, doświadczenia zaś Michelsona wykazały, że ruchów względem eteru nie można stwierdzić. Dziś wreszcie odrzucono zupełnie w fizyce pojęcie eteru, ale na miejsce jego wszedł nowy kłopot: pojęcie czasu. Dawniej tego pojęcia nie analizowano bliżej. Według nowych pojęć człowiek jadący w wagonie ma inny czas, niż stojący np. na stacyi. Są to zasady względności opracowane przez Einsteina. Nie będziemy na razie w to wchodzić, pozostaniemy przy dawnem pojęciu czasu, a zaspokoimy się tem, że owe innowacyjne rozróżnienia ważne są dopiero przy bardzo wielkich prędkościach np. ruchu światła. Wobec tego że układy względem ziemi, gwiazd, ciała stałego α, nie mają żadnego uzasadnienia, przyjmiemy jako definicyę układu, najściślejszą jeszcze definicyę Langea: Pomyślmy sobie w bardzo wielkiej odległości od systemów planetarnych, tak by ich siły grawitacyj-

ne nie wywierały już żadnego wpływu, trzy strzelby prostopadle do siebie ustawione, równocześnie wystrzelone. Drogi pocisków wyznaczą nam trzy osie, a punkt przecięcia się tych dróg początek układu. <u>Położenie</u> jakiegokolwiek

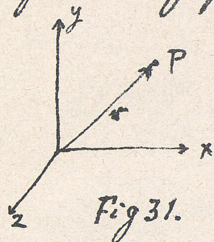


Fig 31.

punktu P zależnie od czasu <u>t</u> (parametr) będzie określone sposobem geometryi analitycznej równaniami:

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t) \quad z = \psi(t)$$

zaś w rachunku wektorowym równaniem:

$$r = F(t) = ix + jy + kz$$

<u>Prędkość</u>. Niech punkt P porusza się w sposób ciągły*) i niech położenie jego będzie w każdej chwili

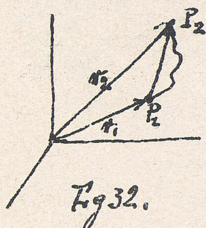


Fig 32.

określone. Mając tak dane dwa położenia P_1 i P_2 (następujące po sobie w czasie) przez wektory r_1 i r_2 dla chwil t_1 i t_2, określamy jako <u>prędkość przeciętną</u> wyrażenie:

$$\frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}$$

gdzie $r_2 - r_1$ oznacza różnicę geometryczną. Przechodząc w tem wyrażeniu do granicy, dostajemy <u>prędkość</u> w da-

*) Co do pojęcia ciągłości funkcyi patrz: Wstęp do teoryi funkcyi prof. Sierpińskiego. (Kółko mat-fiz.)

nej chwili:

$$\lim_{t_2 = t_1} \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = v = \frac{dr}{dt}$$

Wyrażenie to jest wektorem. Można je rozłożyć na wektory składowe:

$$v = \frac{\lim(ix_2 + jy_2 + kz_2) - \lim(ix_1 + jy_1 + kz_1)}{t_2 - t_1} = i \lim \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + j \lim \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + k \lim \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

czyli

$$v = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt}$$

Jest to najprostszy sposób rozkładania prędkości v na jej prędkości składowe w kierunkach osi układu. Znacząc

$$u = \frac{dx}{dt} \quad v = \frac{dy}{dt} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

napiszemy nasz rozkład w formie:

$$v = iu + jv + kw$$

Wartość bezwzględna prędkości będzie:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

gdzie ds przedstawia element drogi, s ogólnie łuk drogi. Słowami określają jeszcze inaczej prędkość: jako zmienność czasową położenia punktu. Definicya ta odnosi się nie tylko do prędkości jednostajnej ale też ciągle zmien-

nej.

<u>Składanie prędkości</u>. Niech punkt P ma określone położenie względem układu O, ten ostatni zaś niech ma określone położenie względem układu S. Przez to ma też punkt P określone położenie względem S. Będzie

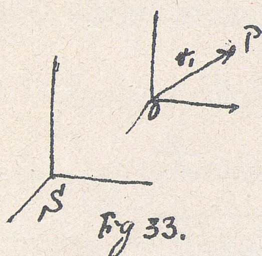
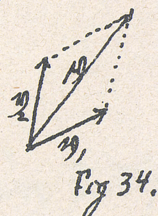


Fig 33.

ono superpozycyą dwu poprzednich położeń. Stąd: zmiany położenia P względem O oraz zmiany układu O względem S superponują, tj zmiana położenia punktu P względem S jest sumą geometryczną dwu zmian poprzednio powiedzianych. Jeśli więc v_1 oznacza prędkość P względem O, zaś v_2 prędkość O względem S, to <u>prędkość wypadkowa</u>:


Fig 34.

$$v = v_1 + v_2$$

Liczne są przykłady superpozycji: 1. Choćby owo sławne spadanie kuferka w wagonie poruszającym się.

2. Do obwodu koła wozu jadącego przyczepia się papierek. Skutkiem takiego ruchu powstanie cykloida. W ruchu tym powstaną punkta zwrotne, gdzie prędkość = 0.


Fig 35.

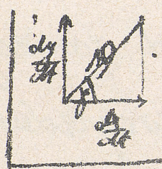
3. Figury Lissajou są złożeniem dwu ruchów harmonicz-

nych względem siebie prostopadłych. Kształt tych figur zależy od stosunku okresów. Niech np. ruch tak będzie określony

$$x = a \sin \alpha t, \quad y = b \cos \alpha t$$

Prędkości: $\frac{dx}{dt} = a\alpha \cos \alpha t \qquad \frac{dy}{dt} = -b\alpha \sin \alpha t$

Prędkość wypadkowa: $V = \sqrt{(a\alpha \cos \alpha t)^2 + (b\alpha \sin \alpha t)^2}$.


Fig 36.

Kierunek jej znajdziemy z uwagi, że jej składowe $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ superponują się geometrycznie. Będzie zatem: $tg\,\varphi = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\, tg\,\alpha t$.

Kształt toru dostaniemy rugując t z równań: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Tu zatem:

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha t &= \frac{x}{a} \\ \cos \alpha t &= \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \text{stąd} \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Jest to równanie elipsy. Zatem przy składaniu dwu ruchów harmonicznych, prostopadłych do siebie, o różnych amplitudach a i b, a równych okresach α, dostaniemy ruch eliptyczny.

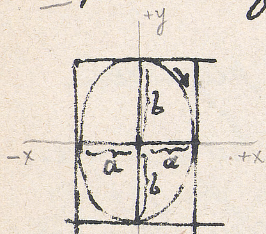


Fig 37.

Dla $t = 0 \quad x = 0 \quad y = b$

Przy wzroście t, x rośnie, y maleje. Ruch odbywa się w kierunku strzałki.

Dla $t = \frac{\pi}{2\alpha} \quad x = a \quad y = 0$

" $\quad t = \frac{2\pi}{\alpha} \quad x = 0 \quad y = b$ znowu ruch się tensam na nowo zaczyna. Zatem ruch ten peryodyczny.

Gdybyśmy założyli równania:

$$x = a \sin \alpha t, \quad y = b \cos(\alpha t + \varepsilon)$$

dostalibyśmy znowu ruch po elipsie, atoli elipsa ta położona będzie asymetrycznie względem osi x i y. Będzie się ona mogła też degenerować w prostą. Stanie się to w razie,

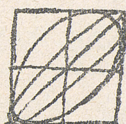


Fig 38.

gdy $x = a \sin \alpha t$

$y = b \sin \alpha t$ tj dla $\varepsilon = \frac{3\pi}{2}$, bo wtedy

$$\cos(\alpha t + \tfrac{3\pi}{2}) = \sin \alpha t.$$

Ciekawsze przykłady składania ruchów dają równania:

$$x = a \sin \alpha t$$

$$y = b \cos m \alpha t \qquad (m \text{ nat.})$$

Sławny jest przykład składania i rozkładania ruchów planet, które przypominają ruchy po epicykloidzie. Główna zasługa M. Kopernika polega właśnie na tem, że on widziane ruchy planet pojął jako pozorne i jako superpozycję ruchów ziemi, oraz obserwowanych planet. W ten sposób uprościł wiele spraw. Uproszczenie to nie musi zaraz opisywać istoty ruchów ciał niebieskich, czyni nam tylko pojmowanie ich daleko prostszem niż to czyniła zasada Ptolomeusza.

4. Prócz spółrzędnych Kartezjuszowskich lub wielkości wektorowych możemy jeszcze używać do opisu ruchu spółrzęd-

nych biegunowych. Np:



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

gdzie r i φ są wielkościami zmiennemi.

Fig 39.

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

Możemy te prędkości składowe złożyć w wypadkową:

$$V = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Wobec dowolności składania i rozkładania możemy, mając prędkość V rozłożyć ją na składowe: w kierunku promienia wodzącego r i w kierunku normalnym do r.
W tym celu uważamy jej składowe pierwsze u i v.
Z u przypadnie w kierunek promienia: $u\cos\varphi$, z v natomiast: $v\sin\varphi$; w kierunek normalnej przypadnie z u wartość: $-u\sin\varphi$, zaś z v przypadnie: $v\cos\varphi$. (patrz Fig 39.)
Superponując teraz to wszystko dostajemy:

$$v_r = u\cos\varphi + v\sin\varphi$$

$$v_\perp = -u\sin\varphi + v\cos\varphi$$

Wstawiając w te wzory na u i v wartości poprzed znalezione dostaniemy:

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_\perp = r\frac{d\varphi}{dt}$$

Wzory te można zresztą bezpośrednio wywnioskować. Gdy

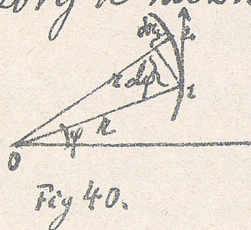


Fig 40.

punkt poruszy się od 1 do 2, r wzrośnie o dr; więc słuszny poprzedni wzór pierwszy. Odnośnie do drugiego, powiadamy, że wzrośnie φ o kąt $d\varphi$. Długość odcinka normalnego do r będzie $r\,d\varphi$, więc znowu wzór słuszny.

Przyspieszenie. Podobnie, jak do pojęcia prędkości dochodzimy z pojęcia drogi i czasu, tak też pojęcie przyspieszenia tworzymy na podstawie pojęcia prędkości i czasu. Określamy przyspieszenie: jako zmienność czasową prędkości. Znaczy się to, obserwujemy prędkości w dwu bliskich momentach czasu i tworzymy ich różnicę geometryczną i dzielimy przez czas. Przyspieszenie jest wielkością wektorową. Zauważymy, że wyrazu „przyspieszenie" używamy tu w innym sensie niż się go potocznie używa, względnie zakres jego zwiększamy. W tem też znaczeniu mówimy o ruchu przyspieszonym po obwodzie koła, chociaż ruch ten odbywa się tak, że punkt w równych czasach zakreśla równe łuki. Zmienia się jednak tu kierunek. W myśl słownych określeń znaczymy przyspieszenie:

$$w = \lim \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt}$$

Wobec powyższego znakowania $w = \frac{dv}{dt}$

$$w = \frac{d^2r}{dt^2} = i\frac{d^2x}{dt^2} + j\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Zatem przyspieszenie w można uważać za superpozycję przyspieszeń w kierunkach osi układu. Co do wartości bezwzględnej wyrazi się ono:

$$W = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Prędkość wypadkowa w każdej chwili ma kierunek styczny do toru. Z przyspieszeniem jest zupełnie odmiennie. Przyspieszenie nie jest w ogóle styczne. Analogicznie, jak wogóle wielkości wektorowe, rozkładamy też przyspieszenie. Często rozkłada się przyspieszenie w kierunku stycznym do toru i normalnym; tem się więc tu zajmiemy. Dla prostoty załóżmy, że ruch rozpatrywany w tej chwili jest płaski. Prędkość V rozkładamy na u w kierunku osi $x^{ów}$, i v w kierunku osi $y^{ów}$: $u = V\cos\gamma$, $v = V\sin\gamma$.

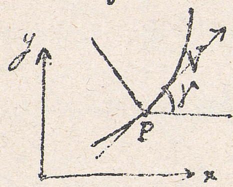


Fig 41

Odpowiednio przyspieszenia są:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{dV}{dt}\cos\gamma - V\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt}\sin\gamma + V\cos\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$

Każde z tych przyspieszeń rozkładamy na przyspieszenie w kierunku stycznym i normalnym, a następnie przypadające przyspieszenia w tym samym kierunku superpo-

nujemy. Dostaniemy tak, jak to łatwo z ryciny 41 wywnioskować:

$$w_s = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\gamma + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\gamma$$

$$w_n = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\gamma + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\gamma$$

Wstawiając w wyrażenia te za $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ wartości ich powyższe, znajdziemy:

$$w_s = \frac{dV}{dt}$$

$$w_n = V\frac{d\gamma}{dt}.$$

Wprowadźmy jeszcze tu pojęcie promienia krzywizny: $R = \frac{ds}{d\gamma}$

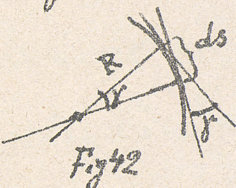


Fig 42

$ds = R\,d\gamma$ czyli $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\cdot V.$

Więc wypisując jeszcze raz owe przyspieszenia, mamy:

$$w_s = \frac{dV}{dt}$$

$$w_n = \frac{V^2}{R}$$

Możnaby ze względu na przyspieszenie klasyfikować ruchy:

1). $w_n = 0$, $R = \infty$; w_s nie zależy od kształtu drogi tylko od położenia 2 punktów po sobie; w tym razie będzie ruch prostolinijny coraz szybszy, gdy $w_s > 0$, coraz wolniejszy, gdy $w_s < 0$.

2). Gdy $w_n \neq 0$, $w_s \neq 0$, będzie ruch wogólności krzywolinijny kształtu zależnego od ustosunkowania przy-

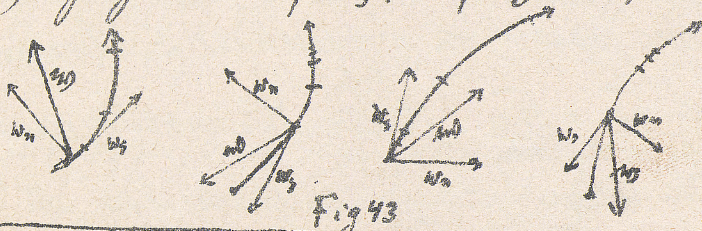


Fig 43

spieszeń w_s i w_n jak to ryc 43. zaznacza.

3). $w_n = 0$, $w_s = 0$, ruch prostolinijny jednostajny

4). $w_n \neq 0$ $w_s = 0$, ruch krzywolinijny, punkt w równych czasach zakreśla równe łuki.

Wzory poprzednie wyprowadziliśmy przy założeniu, że ruch odbywa się w płaszczyźnie. Są one jednak również ważne, gdy ruch odbywa się w przestrzeni. Do pojęcia przyspieszenia przynależy położenie trzech po sobie następujących punktów. Przez takie trzy punkty, lub co na jedno wychodzi dwie styczne, można zawsze poprowadzić płaszczyznę ściśle styczną (oskulacyjną). Możemy tedy każdy ruch przestrzenny sprowadzić do szeregu ruchów płaskich. A stąd wzory nasze ważne ogólnie.

Możnaby zresztą wzory te udowodnić czysto geometrycznie, czego sposób tu streścimy. Niech punkty 1, 2, 3 toru będą odległe od siebie o jednostki czasu. Gdyby punkt materyalny przebiegłszy tor $\overline{12}$ poruszał się dalej w kierunku stycznym znalazłby się po upływie jednostki czasu w M. Wistocie znajdzie się on w punkcie 3. Równa tedy przyspieszenia $\frac{\overline{23} - \overline{2M}}{\Delta t} = \frac{\overline{M3}}{\Delta t}$. Wektor $\overline{M3}$ można uważać jako wypadkowy. W kierunku stycznym składowa jego jest:

Fig 44

$: \overline{MQ_1} = 2\overline{Q_1} - 2\overline{M}$. Można $2\overline{Q_1}$ uważać za równe $\overline{23}$. Stąd zaś

$$\lim \frac{\overline{MQ_1}}{\Delta t} = \lim \frac{\overline{23} - \overline{2M}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt}.$$

W kierunku normalnym składowa wynosi $\overline{Q_2 3}$. Wobec $:Q_1 3 : \overline{23} = \overline{23} : R$ jest

$$\frac{\overline{Q_1 3}}{\Delta t} = \frac{(\overline{23})^2}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

Na tem kończymy nasze rozważania dotyczące kinematyki punktu, a przystępujemy do dynamiki punktu.

Dynamika punktu.

Zasady mechaniki.

Już Galileusz przewidział niektóre prawa dynamiki punktu. Kalkulacye swoje w tym względzie sprawdzał doświadczeniem. Już bardzo prosta obserwacya poucza nas, że ciało swobodnie pozostawione spada ku ziemi z coraz większą szybkością. Galileusz zapytał się, według jakiego prawa ten ruch następuje; rozumowanie jego moglibyśmy tak wyrazić naszymi sposobami: Jeśli $\frac{ds}{dt}$ wzrasta z czasem, to wzrost ten może być proporcyonalny do drogi. Przypuśćmy że tak jest, że zatem

$$\frac{ds}{dt} = as$$

i wyciągnijmy stąd konsekwencye. Będzie

$$\frac{ds}{s} = a\,dt$$

$$\log s = at + Const$$

$$s = e^{Const + at} = A e^{at}$$

Dostaliśmy przy powyższem przypuszczeniu taki wzór na drogę. Oczywiście dla $t=0$ musi być $s=0$. Według wzoru możliwe to jedynie, gdy $A=0$. Jeśli zaś tak jest, to wogóle ruch taki jest niemożliwy, bo nigdy nie mógłby się rozpocząć. Zatem supozycya była fałszywa. Wobec tego nasunęła się Galileuszowi inna myśl, że spadanie będzie można ująć w formę:

$$\frac{ds}{dt} = gt$$

Wyciągnijmy z tego konsekwencye.

$$ds = gt\,dt$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + C$$

Załóżmy znowu warunki początkowe, a więc dla $t=0$, musi być $s=0$. Wymaga to by $C=0$. Warunek ten nie sprzeciwia się wcale doświadczeniu. Albowiem ze wzoru:

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

czytamy, że ze wzrostem t wzrasta droga, co jest naturalne. A więc ujęcie to matematyczne faktu fizycznego może być słuszne. Stwierdzić je atoli trzeba wielką ilością doświadczeń, co też Galileusz istotnie czynił. Używał on w tym celu równi pochyłej, bo wtedy prędkość ciała spadającego $= gt\sin\varphi \leq gt$

Przy tak urządzonem doświadczeniu rachunek nie jest ścisły, bo ciało toczy się po równi pochyłej, a toczenie się ciała wywiera wpływ na przyspieszenie, jak to zresztą w mechanice ciał sztywnych bliżej rozpatrzyć będziemy mieli sposobność. Stwierdził też Galileusz swe twierdzenia z wieży pochyłej w Pizie. Biorąc różne równie pochyłe, nachylone pod różnymi kątami, wyciągnął dalej Galileusz wnioski teoretyczne, że prędkość zależy od różnicy poziomu i że we wszystkich punktach tego samego poziomu prędkość jest jednakowa. Gdy więc będzie się ciało poruszać w jednym i tymsamym poziomie, to będzie to czynić z prędkością jednostajną.



Fig 45.

Tak doszedł Galileusz do prawa bezwładności opiewającego, że jeśli na ciało nie działa żadna siła, to zachowuje ono ruch prostolinijny z prędkością jednostajną. Ze wstępu już wiemy, że wobec panujących podówczas jeszcze poglądów Arystotelesa, były to myśli rewolucyjne.

Najogólniejszą formę ujął to Newton w dziele: „Philosophiae naturalis principia mathematica” w formie definicyj wstępnych i praw ruchu (leges motus). W pierwszych określa masę, ilość ruchu i siłę:

Masa - powiada on - jest to ilość materyi; określa się ją iloczynem objętości i gęstości, a mierzy się ją ciężarem ciała.
Ilość ruchu jest to iloczyn masy i prędkości.
Siła jest to dążenie do zmiany stanu spoczynku lub ruchu jednostajnego prostolinijnego.

Wzasadach ruchu powiada:

1). Każde ciało zachowuje stan spoczynku lub ruch prostolinijny jednostajny, póki siły zewnętrzne nie oddziaływują na nie.
2). Zmiana ruchu jest proporcyonalna do siły i odbywa się w kierunku siły.
3) Wzajemne działania ciał na się są równe a odbywają się w przeciwnych kierunkach. (actio aequat reactioni)

Mechanika klasyczna uznaje do dziś prawa Newtona; musi się jednak przyznać, że forma ich wypowiedzenia jest bardzo wadliwa.*) Według logicznej analizy definicya masy właściwie nic nie definiuje; nie można mówić „ilość materyi", bo ilości materyi nie potrafimy mierzyć, pojęcie zresztą materyi jest właściwie metafizyczne. Dalej wprowadzając słowo „gęstość" popełniamy circulus vitiosus, bo gęstość określa się znowu jako ilość masy w 1 cm^3. Dalej ważenie ciała polega na zu-

*) Witkowski reformuje już w swem dziele ich wypowiedzenia. Franke stawia je jeszcze na czele.

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

pełnie innych podstawach mianowicie grawitacyi. Dalej w prawach ruchu powtarza Newton to samo, co powiedział w definicyach; i tak siła jest dwa razy określona. Stąd nie można wiedzieć, czy leges motus są prawami doświadczalnemi, czy też definicyami.

Krytykę tę wykonał Mach w dziele: Geschichte der Mechanik, oraz Poincaré.

Według Macha na czele trzeba postawić 3cie prawo Newtona, (actio aequat reactioni), ale tak je wypowiedzieć: Doświadczenie uczy nas, że ciała udzielają sobie przyspieszeń w kierunku łącznicy przeciwbieżnych pod pewnymi warunkami, których badanie bliższe należy do fizyki doświadczalnej.

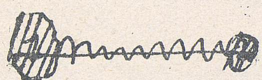


Fig 46.

To udzielanie sobie przeciwbieżnych przyspieszeń może być uskutecznione już to sprężyną, już też polega na siłach elektrycznych, magnetycznych, grawitacyjnych itd.

2) Doświadczenie uczy nas, że przyspieszenia między dwoma ciałami są zawsze w stosunku niezmiennym niezależnie od wielkości tych przyspieszeń. Odwrotny stosunek przyspieszeń nazywamy stosunkiem mas. Stosunek:

$$w_1 : w_2 = m_2 : m_1$$

może nam być dany. Zależy on od rodzaju ciał, a nie

wielkości przyspieszeń.

3) Doświadczenie uczy nas, że stosunek mas jest ten sam, czy go znajdziemy bezpośrednio, czy za pośrednictwem ciała trzeciego.

Na podstawie tych praw mamy już sposób mierzenia mas. Jako jednostkę masy obieramy $1\,cm^3$ wody w warunkach dokładnie określonych. Każdą inną masę wyrażamy jako wielokrotność tej jednostki.

Również definicyę siły możemy teraz postawić. Wyrażając

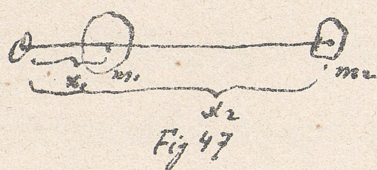


Fig 47

przyspieszenia w formie:

$$w_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad w_2 = -\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

możemy nasze słowne określenia zapisać:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} \text{ itd}$$

<u>Iloczyn z masy i przyspieszenia nazywamy siłą</u>. Jest to określenie konwencyonalne, uzasadnione prostotą rachunku. Piszemy ogólnie siłę $X_i = m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}$

Wobec tych oznaczeń możemy teraz wypowiedzieć prawo: Ciała działają na się siłami równemi ale przeciwbieżnymi.

$$X_1 = -X_2$$

Z tem łączy się jeszcze prawo <u>niezależności sił</u> czyli prawo

składania i rozkładania sił. Opiewa ono: Doświadczenie uczy nas, że jeśli ciało pozostaje pod działaniem różnych sił, to wpływy te superponują się. Każda ze sił powoduje przyspieszenie niezależnie od pozostałych (Wielobok sił).

Wspomnieć należy, że prawo to starano się dowieść spekulacyą. Spekulacye jednak owe były fałszywe, bo prawo to empiryczne.

Na podstawie powyższych definicyj i praw doświadczalnych mamy sposób dynamiczny mierzenia sił, polegający na podaniu wielkości przyspieszenia jakiego siła udziela. W praktyce mierzy się siły sposobem statycznym polegającym na prawie współdziałania sił (równoważenie).

Reasumując teraz to, cośmy o podstawach mechaniki powiedzieli, widzimy, że składa się ona z dat doświadczalnych i konwencyonalnych. Tem właściwie wyczerpaliśmy już mechanikę, a to co dalej przyjdzie będzie zastosowaniem szczególnem.

Ruch prostolinijny.

Pęd = ilość ruchu. Pędem czyli ilością ruchu czyli jak to niektórzy nazywają momentem ruchu nazywamy iloczyn z masy i prędkości: $m\frac{dx}{dt}$

Jest to definicya dowolna. Moglibyśmy na jej podstawie wyrazić poprzód określoną siłę:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)$$

tj. siła jest pierwszą pochodną pędu. Warunek tego oczywiście jest, by funkcya $m\frac{dx}{dt}$, czyli wobec zakładanej niezależności stałości m, by $\frac{dx}{dt}$ miała pochodną. Zresztą już wyżej zastrzegli się, że nasze funkcye wprowadzane do określenia ruchu mają spełniać warunek ciągłości i mają mieć pochodną.

<u>Popęd</u> (impuls). Uczyńmy na razie założenie, że ruch odbywa się po osi x-ów prostoliniowo. Z poprzedniego określenia pędu mamy:

$$X\,dt = d\left(m\frac{dx}{dt}\right)$$

równanie ważne dla t. zw. <u>sił chwilowych</u>. Ściśle biorąc każda siła trwa w czasie. Gdy mówimy o siłach chwilowych, to wyobrażamy sobie je jako jakieś pchnięcia bardzo szybko po sobie następujące, natychmiast. Chcąc mieć powyższe równanie w pewnych granicach czasu, napiszemy je:

$$\int_1^2 X\,dt = \int_1^2 d\left(m\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{dx}{dt}\Big|_1^2 =$$

$$= m\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = m u_2 - m u_1$$

i tę całkę ze siły względem czasu nazywamy popędem. (impulsem)

Praca. Tworząc analogicznie całkę ze siły względem drogi, dostajemy definicyę pracy (tu w szczególnym wypadku).

$$\int_1^2 X\,dx = \int m\frac{d^2x}{dt^2}\,dx = \int m \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\Bigg]_1^2$$

$$\int_1^2 X\,dx = \frac{m}{2}u_2^2 - \frac{m}{2}u_1^2$$

Iloczyn z połowy masy i kwadratu prędkości nazywamy energią kinetyczną. Równanie powyższe wyraża, że praca równa się różnicy energii kinetycznej w dwu chwilach czasu. Równaniem tem mamy też wyrażony specyalny wypadek ogólnego prawa o zachowaniu energii mechanicznej. Zapomocą tak określonego pojęcia pracy możemy wrócić podobnie, jak przy pojęciu pędu, do pojęcia siły; oto jest:

$$X = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}u^2\right]$$

tj. siła jest pierwszą pochodną z energii kinetycznej. Obie całki: siły względem czasu i siły względem drogi odgrywają wielką rolę w mechanice. Wytworzyły się

nawet osobne metody, jedna posługująca się pojęciem pędu (Newton, Descartes), inna zaś energii kinetycznej (Leibnitz, Huygens). D'Alembert połączył je obie, mówiąc że można się jedną i drugą stosownie do użyteczności posługiwać.

A. Dynamika punktu swobodnego.

Zadania, jakie napotykamy w mechanice są dwojakie, albo mamy opisany ruch, a pytamy się jaka siła powoduje ten ruch, albo mając daną siłę pytamy się, jaki ona spowoduje ruch. Pierwszego rodzaju zadanie jest zazwyczaj łatwe. Przypominając sobie wzór na siłę $X = m\frac{d^2x}{dt^2}$, widzimy że potrzeba funkcję x dwukrotnie upochodnić względem czasu t i utworzyć iloczyn masy i drugiej pochodnej. Postępujmy tak ogólnie, nie tylko zaś w szczególnym wypadku ruchu, jaki teraz mamy przed oczyma tj. ruchu wzdłuż osi x ów. Później to uogólnimy, na razie zostając przy ruchu wzdłuż osi x ów, damy przykład takiego zadania:

1. Niech ruch określony będzie równaniem:

$$x = at + b$$

Mamy: $\frac{dx}{dt} = a$ $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. Stąd $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ tj. ruch

taki odbywa się bez działania siły.

2. $x = \frac{g}{2}t^2 + at + b$.

Będzie: $\frac{dx}{dt} = gt + a$, $\frac{d^2x}{dt^2} = g$, $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$ tj. siła jest proporcyonalna do masy. Jest to siła grawitacyjna. Przyspieszenie, jakie ona powoduje jest liczbą stałą, prędkość proporcyonalna do czasu, lecz niezależna od masy. Stąd wszystkie ciała spadają - jak to prawo tu stwierdza - z jednakową prędkością.

3. $x = (at+b)^{\frac{2}{3}}$

Będzie: $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}a(at+b)^{-\frac{1}{3}}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2}{9}a^2(at+b)^{-\frac{4}{3}}$, zatem $X = -\frac{2}{9}a^2(at+b)^{-\frac{4}{3}}m = -\frac{2}{9}\frac{a^2m}{x^2}$. Będzie to ruch, który się zaczyna z prędkością daną (dla $t=0$). Potem skutkiem działania siły prędkość jego maleje. Dla $t=\infty$, czyli wodstępie $x=\infty$, prędkość $=0$.

Trudniejsze są zadania drugiego rodzaju, gdy dane jest równanie siły, a pytamy jaki jest ruch przez nią spowodowany, a to z tego powodu że chodzi tu już o całkowanie. Sprawa ta byłaby względnie łatwą, gdyby funkcya wyrażająca siłę była funkcyą czasu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X = f(t)$$

Wtedy bowiem: $m\frac{dx}{dt} = \int f(t)\,dt + C = \varphi(t) + C$

$$mx = \int \varphi(t)\,dt + Ct + a$$

O ile całkowania są wykonalne, to z równania ostatniego wyrazimy spółrzędną x punktu i temsamem mamy już ruch opisany. W praktyce jednak nigdzie nie napotykamy siły wyrażonej jako funkcya czasu, jak doświadczenie nas uczy, chybabyśmy sobie sztucznie taką siłę stworzyli. Zwykle napotykane siły w mechanice zależą od położenia systemu, odległości punktów między sobą i prędkości poruszania się systemu. Do rozwiązywania takich zadań potrzebna już jest znajomość równań różniczkowych. W miarę potrzeby tedy wiadomości z nich będziemy sobie uzupełniać. Przypuśćmy teraz, że siła wyraża się jako funkcya spółrzędnej x:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X = f(x).$$

Wielu całkowania tej funkcyi, wobec ciągle zakładanej przez nas ciągłości naszych funkcyj i ich regularności w uważanym przedziale, dajmy na to $(a \ldots b)$ jest to zawsze dozwolone *), napiszmy:

$$m\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{dx}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt = f(x)\,dx$$

---

*) Warunki przez nas podane są aż nadto wystarczające. Bliżej patrz: „Zastosowania do teoryi mnogości" prof. Sierpińskiego, Równania różniczk. p. Kępińskiego etc.

czyli $d\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = f(x)dx$, skąd

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int f(x)dx + C$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{C + \int f(x)dx}$$

Tak otrzymaliśmy prędkość jako funkcyę odległości. Stąd

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C + \int f(x)dx}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\int dt + a = \frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{m}} + a$$

Gdy te całki wyliczymy, dostaniemy x jako funkcyę czasu, a przez to zadanie nasze jest już uskutecznione. Na powyższe postępowanie damy przykłady:

1) Siłą sprężystą nazywamy taką, która jest proporcyonalną do wychylenia masy m z pozycyi równowagi i stara się tę masę do pozycyi równowagi wrócić (przeciwdziała wychyleniu). Określi się ją tedy równaniem różniczkowem:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x$$

Pytamy się jaki ruch powstanie skutek tej siły. Na mocy powyższych uwag przeprowadzimy tak rachunek:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt = -\alpha x\,dx$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{\alpha x^2}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \alpha x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{m}} + a = \frac{t}{\sqrt{m}} + a$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \alpha x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{d\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{2C}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha x^2}{2C}}}$$

Kładąc $x\sqrt{\frac{\alpha}{2C}} = z$

dostajemy: $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arc\sin z = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arc\sin x\sqrt{\frac{\alpha}{2c}}$

Wracając do wzoru poprzedniego, mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arc\sin x\sqrt{\frac{\alpha}{2c}} = \frac{t}{\sqrt{m}} + a$$

$$\arc\sin x\sqrt{\frac{\alpha}{2c}} = \sqrt{\alpha}\left(\frac{t}{\sqrt{m}} + a\right) \quad ; \text{znacząc } a\sqrt{\alpha} = \varepsilon$$

mamy: $$\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t + \varepsilon\right) = x\sqrt{\frac{\alpha}{2c}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2c}{\alpha}}\sin\left(t\sqrt{\frac{\alpha}{m}} + \varepsilon\right)$$

Mamy więc x wyrażone jako funkcję t. Wchodzą w to równanie dwie stałe całkowania ε i c. Chodzi o ich określenie. W tym celu zwracamy się do danych doświadczeniem danych. Owiedzmy, że jest nam dane położenie punktu m w pierwszej chwili i prędkość. Oznaczmy jeszcze dla krótkości $\sqrt{\frac{2c}{\alpha}} = A$:

$$x = A\sin\left(t\sqrt{\frac{\alpha}{m}} + \varepsilon\right)$$

Wobec więc tego cośmy powiedzieli, niech dla $t=0$, będzie $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$. Pierwszy warunek można wstawić wprost w znalezione równanie. Będzie:

$$x_0 = A\sin\varepsilon.$$

Aby można skorzystać z drugiego warunku, wystarczy znalezione równanie upochodnić względem t:

$$\frac{dx}{dt} = A\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\cos\left(t\sqrt{\frac{\alpha}{m}} + \varepsilon\right). \text{ Stąd}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = A\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\cos\varepsilon$$

Z obu tych równań przy powyżej wspomnianych warun-

kach zachodzących obliczymy stałe A i ε. Wstawiając $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = u_0$ i dzieląc równanie górne przez dolne, mamy na stałą ε, równość:

$$tg\,\varepsilon = \frac{x_0}{u_0}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

Wobec $\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varepsilon}}$, $u_0 = A\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varepsilon}}$, dostajemy na stałą A równość:

$$A = u_0\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\cdot\sqrt{1+tg^2\varepsilon} \quad \text{(amplituda)}.$$

Zwykliśmy jeszcze równania ruchu wypowiadać w słowach dla poszczególnych chwil czasu. Rozpatrujemy przez to przebieg ruchu i rozpatrywanie to zowiemy dyskussyą. Np. o ruchu przez nas rozpatrywanym powiemy, że jest on peryodycznym, bo taką jest funkcya $\sin$. Jaki jest peryod, tj. jaka jest liczba, dla której funkcya x argumentu t otrzymuje wartość tęsamą co np. dla $t=0$. Ze znajomości funkcyj trygonometrycznych wynika, iż będzie ten warunek spełniony dla takiego $t = T$, iżby

$$T\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 2\pi \quad \text{, skąd}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad \text{czas peryodu (okres).}$$

2) Siłę, która przeciwdziała prędkości chwilowej i jest do niej proporcyonalna (ogólnie jest funkcyą prędkości), nazywamy oporem (tarciem). Przykłady takich sił są bardzo częste w mechanice np. kropelka opadająca, lecący pocisk.

Stokesa

itd. Znany jest wzór na opór $X = -6\pi\mu a u$ jakiego doznaje kulka o promieniu a poruszająca się z prędkością u wśród ku lepkim, którego spółczynnik lepkości jest μ. Wzór taki ważny dla prędkości miernych tylko, dla ruchów szybkich przestaje być ważny. My założmy równanie:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt} \qquad (\text{więc } \beta = 6\pi\mu a)$$

W celu całkowania napiszmy to:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}dt = -\beta\, dx \qquad \text{skąd}$$

$$m\frac{dx}{dt} = -\beta x + a$$

$$m\int\frac{dx}{a-\beta x} = \int dt$$

$$-\frac{m}{\beta}\log(a-\beta x) = t + c'$$

$$\log(a-\beta x) = -\frac{\beta}{m}t + C \qquad \text{gdzie } C = -\frac{c'\beta}{m}$$

$$a - \beta x = e^{C-\frac{\beta t}{m}} = Be^{-\frac{\beta t}{m}}$$

$$x = \frac{a}{\beta} - \frac{B}{\beta}e^{-\frac{\beta t}{m}}$$

Do oznaczenia dwu stałych całkowania a i B niech nam będą dane dwie daty np. dla $t=0$, niech będzie: $\frac{dx}{dt} = c$, oraz $x=0$. Stąd

$$a - B = 0$$

$$a = B \qquad \text{tj obie stałe są sobie równe.}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{m}e^{-\frac{\beta t}{m}} \text{ ; stąd dla } t=0$$

$$c = \frac{B}{m}, \quad B = mc = a$$

Wprowadzając te warunki do równania znalezionego ruchu, mamy: $$x = \frac{mc}{\beta}\left[1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}\right]$$

Ze znalezionego wzoru na prędkość wnioskujemy, że prędkość ta mając początkową wartość c maleje do zera dla $t=\infty$; x natomiast wzrasta zbliżając się asymptotycznie do granicznej wartości $\frac{mc}{\beta}$. Możemy unaocznić sobie przebieg ruchu graficznie, kreśląc w układzie prostokątnym dla osi t i x wartości funkcji x dla odpowiednich wartości argumentu t.



Fig 48.

3) Inny jeszcze przykład na opór:
$$X = -\beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

W celu całkowania założymy: $\frac{dx}{dt} = u$, wtedy $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}$.

Zatem
$$m\frac{du}{dt} = -\beta u^2$$
$$\frac{m\,du}{u^2} = -\beta dt$$. Całkując, mamy
$$-\frac{m}{u} = -\beta t + a$$ Stąd
$$u = \frac{m}{\beta t - a} = f(t) = \frac{dx}{dt}$$
$$x = \int f(t)\,dt + \text{Const.}$$

Całkowanie to da się już łatwo dokonać. Podobnie przeprowadzi się rachunki w wypadku, gdy uwzględnimy jeszcze siłę ciężkości np. przy spadaniu kropli mgły. Równa-

nie będzie wówczas takie: $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \beta\frac{dx}{dt}$. Rozpatrzymy to bliżej w Ćwiczeniach. stąd $\frac{dx}{dt} = \frac{mg}{\beta}\left[1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right]$, dla $t = \infty$ $V = \frac{mg}{\beta}$, $\beta V = mg$ opór = ciężkość

Po tych przykładach ruchu po linii prostej możemy rozważania nasze <u>uogólnić</u> na ruch w przestrzeni. Podstawę do tego rozszerzenia daje nam prawo niezależności sił, orzekające, jak wiemy, że siły składowe nie przeszkadzają sobie i że siły możemy składać i rozkładać. W rozważania nasze wprowadzimy trzy siły, działające w kierunkach osi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Jednocześnie przytem czynimy zastrzeżenie, że kierunki sił X, Y, Z są niezmienne, co zresztą już wynika z przyjęcia stałego układu. Wprowadziliśmy przedtem w odniesieniu do ruchu po linii prostej pojęcia: pędu, popędu, pracy, energii kinetycznej. Otóż teraz pojęcia te uogólnimy dla ruchu w przestrzeni, wyrażając je rachunkiem wektorowym i sposobami geometrji analitycznej:

Wyrażone dopiero co trzy siły składowe, wyrazimy w rachunku wektorowym:

$$f = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(ix + jy + kz) = iX + jY + kZ$$

Wiemy, że prędkość w rachunku wektorowym wyraża się

$$v = \lim \frac{r'-r}{t'-t} = \frac{dr}{dt}$$

przyspieszenie $w = \lim \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$. Stąd siła wyrazi się inaczej tu:

$$f = \frac{d}{dt}(m\,v) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dr}{dt}\right)$$

To wyrażenie odpowiada wprowadzonemu wyżej wyrażaniu siły przez pęd, tylko tam (str. 48.) odnosiliśmy je do ruchu prostoliniowego, tutaj zaś jest ono odniesione do ruchu w przestrzeni. Możemy je rozłożyć na trzy:

$$X = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)$$

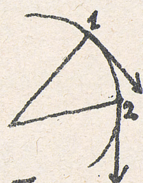
$$Y = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right)$$

$$Z = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right)$$

przez co jesteśmy na gruncie geometryi analitycznej. Analogicznie uogólnimy pojęcie popędu, pisząc:

$$\int_1^2 f\,dt = m\,v_2 - m\,v_1 = m(v_2 - v_1)$$

gdzie różnica $m(v_2 - v_1)$ jest rozumiana, jak wogóle w rachunku wektorowym, w sensie geometrycznym. Np. po obwodzie koła gdy się ruch odbywa, to niema



różnicy bezwzględnej prędkości, bo ruch jest jednostajny, tylko jest różnica geometryczna.

Fig 49.

Rozpisując powyższą całkę względem czasu,

dostaniemy znowu trzy równania:

$$\int_1^2 X\,dt = m\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$$

$$\int_1^2 Y\,dt = m\left(\frac{dy}{dt}\right)_2 - m\left(\frac{dy}{dt}\right)_1$$

$$\int_1^2 Z\,dt = m\left(\frac{dz}{dt}\right)_2 - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_1$$

Teraz uogólnimy jeszcze pojęcie pracy i energii kinetycznej, wychodząc z równań Newtonowskich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad \Big| \, dx$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad \Big| \, dy$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \quad \Big| \, dz$$

które pomnożymy odpowiednio przez dx, dy, dz, dodamy do siebie i weźmiemy całki w granicach $1 \dots 2$:

$$m\int_1^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \int_1^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad \text{czyli}$$

$$m\int_1^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt = \int_1^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad \text{, co daje}$$

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]_1^2 = \int_1^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad \text{czyli}$$

$$\frac{m}{2}V^2\Big]_1^2 = \int_1^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad \text{lub wreszcie}$$

$$\frac{m}{2}V_2^2 - \frac{m}{2}V_1^2 = \int_1^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = P_1^2$$

Równanie to przedstawia definicyę pracy ogólnie przy ruchu krzywolinijowym w przestrzeni. Praca wykonana przy przesunięciu masy z punktu 1 do 2 równa się

różnicy energij kinetycznych w dwu tych punktach. Dla unaocznienia ogólności powyższej definicyi pracy dodamy jeszcze rysunek. Niech punkt materyalny m poruszy się

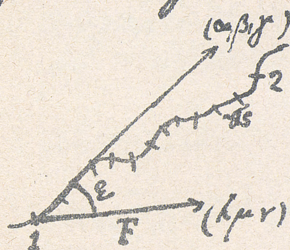


Fig 50.

po torze krzywolinijnym w przestrzeni od 1 do 2. Siła F działająca nań nie potrzebuje być styczną do krzywej owej, ma ona kierunek oznaczony (λ, μ, ν)

Podzielmy tor, po którym punkt się poruszył na elementy o długości ds. Elementami składowemi każdego takiego elementu w kierunkach osi układu prostokątnego będą:

$$dx = \frac{dx}{ds} ds = ds \cos\alpha$$

$$dy = ds \cos\beta$$

$$dz = ds \cos\gamma$$

gdzie α, β, γ oznaczają kąty, jakie każdorazowa styczna z osiami układu zamyka. Analogicznie składowemi siłami siły F będą:

$$X = F \cos\lambda$$

$$Y = F \cos\mu$$

$$Z = F \cos\nu$$

Według definicyi pracy, mamy:

$$P_1^2 = \int_1^2 F(\underbrace{\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu}_{\cos\varepsilon}) ds$$

Jeśli ε oznacza kąt między kierunkiem siły F a stycznej do krzy-

wej zawarty, to całka ta w dalszym ciągu

$$= \int_1^2 F \cos\varepsilon \, ds,$$

$F\cos\varepsilon$ oznacza składową siły F przypadającą w kierunek stycznej; znacząc ją dla krótkości F_s, napiszemy definicyę pracy:

$$P_1^2 = \int_1^2 F_s \, ds$$

Mówi się często praca równa się iloczynowi siły i drogi; otóż rozumie się tu: siłę w kierunku drogi. Moglibyśmy teraz też zależność między energią kinetyczną, a pracą wykonaną przy przesunięciu punktu materyalnego m z punktu 1 do 2 napisać:

$$\frac{m}{2}V_2^2 - \frac{m}{2}V_1^2 = \int_1^2 F_s \, ds.$$

To ostatnie określenie pracy jest bardzo zbliżone do tego, jakie dajemy w symbolice wektorowej. Oto niech f w symbolice wektorowej oznacza siłę o pewnym kierunku. Jeśli

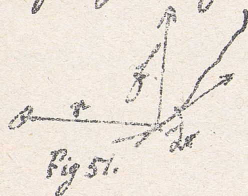


Fig 51.

krzywą, po której się punkt materyalny porusza wyrażamy przez wektor r (str 21), to element toru, to cośmy wyżej znaczyli ds, napiszemy teraz dr.
Określenie pracy będzie:

$$P_1^2 = \int_1^2 (f\,dr)$$

gdzie $(f\,dr)$ oznacza iloczyn skalarny. Ten wyraźnie wypisany jest: $f\,dr = m\frac{d^2r}{dt^2}\,dr = m\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\,dt$, skąd

$$\int_1^2 f\,dr = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)\right]_1^2 = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$

identyczne z wyrażeniem poprzedniem. v_1^2 i v_2^2 są to już wielkości bezwzględne. Pracę elementarną, możemy powiedzieć, wyraża się w symbolice wektorowej iloczynem skalarnym siły i przesunięcia.

Wprowadzimy jeszcze pojęcie potencyału i sił potencyalnych czyli konserwatywnych. Z pojęciami temi zetkniemy się bliżej później. Określamy: Jeśli siły składowe można wyrazić jako cząstkowe pochodne jakiejś funkcyi $U = f(xyz)$ względem jej argumentów x, y, z ze znakiem $-$, a więc

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

to siły te składowe oraz ich wypadkową nazywamy potencyalnemi, funkcyę zaś:

$$U = f(xyz)$$

nazywamy potencyałem.

Utwórzmy całkę, taką jakeśmy wyżej tworzyli przy definicyi pracy:

$$-\int_1^2 \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)}_{dU} =$$

Funkcya podcałkowa przedstawia różniczkę zupełną - dU.

Stąd:

$$-\int_1^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)=-U\Big]_1^2$$

Wobec wielokrotnie wyżej wypisywanych wzorów mamy stąd:

$$\frac{m}{2}V_2^2-\frac{m}{2}V_1^2=U_1-U_2=f(x_1y_1z_1)-f(x_2y_2z_2)$$

czyli:

$$\frac{m}{2}V_1^2+U_1=\frac{m}{2}V_2^2+U_2$$

Gdybyśmy jeszcze raz wypisali powyższą całkę z granicami jednak 1...3, dostalibyśmy:

$$\frac{m}{2}V_1^2+U_1=\frac{m}{2}V_3^2+U_3.$$

Postępując tak dowolną ilość razy, mamy ogólnie:

$$\frac{m}{2}V_1^2+U_1=\frac{m}{2}V_2^2+U_2=\frac{m}{2}V_3^2+U_3=\dots\dots=Const.$$

Znaczy się to, że suma z energii kinetycznej i potencyału lub jak to zwykle mówimy: suma z energii kinetycznej i potencyalnej jest dla każdorazowego położenia punktu materyalnego wielkością stałą przy założeniu, że siły działające są potencyalne. Siły te nazywamy też skutkiem zachowania się w ciągle równej wielkości energii, którą w tym razie nazywamy mechaniczną, siłami konserwatywnemi. (zachowawczemi). Prawo zaś powyższe nazywamy prawem o zachowaniu energii mechanicznej.

Siłami konserwatywnemi są np. siły grawitacyjne, elektrostatyczne, magnetyczne. Dla siły ciężkości potencyał przedstawia nam $U = +mgy$. Istotnie, gdy tworzymy cząstkowe pochodne, dostajemy: $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$, $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, co zgadza się z wzorami na siły składowe działające przy swobodnem spadaniu ciał: $X = 0$, $Y = -mg$, $Z = 0$.

Jeśli nie istnieje taka funkcya $U = f(x, y, z)$, iżby można przez nią siły w powyższy sposób wyrazić, wtenczas siły nie są konserwatywne i prawo zachowania energii mechanicznej wtedy jest nie ważne. Łatwo sobie takie siły skonstruować np: $X = \alpha xy$, $Y = \beta$, $Z = 0$. Powiadam, że siły te nie są potencyalne. Jak się o tem przekonać? Oto wykazać łatwo, że siły te nie spełnią koniecznych warunków sił potencyalnych. Upochadniając siły potencyalne (str. 63) dostajemy warunki konieczne:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Czyniąc tosamo dla sił tych dostajemy: $\frac{\partial X}{\partial y} = \alpha x$, $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$; zatem warunki niespełnione. Siły takie nazywamy <u>rozpraszającemi</u>. Takiemi są np: tarcie, opór ośrodka itd. U nich energia mechaniczna znika zamieniając się na e=

nergię cieplną. W ogólnym tedy sensie prawo o zachowaniu energii pozostaje ważnem. Z siłami potencyalnemi w praktyce prawie nigdy się nie spotykamy; są one tylko ideałami; z siłami rozpraszającemi natomiast na każdym kroku.

Widzieliśmy dotychczas, że jeśli siły są potencyalne to ważne jest prawo o zachowaniu energii mechanicznej. Twierdzenie to jest odwracalne: jeśli jest ważne prawo o zachowaniu energii mechanicznej, to siły dadzą się wyrazić jako potencyalne. Przyjmijmy więc jako zachodzące prawo zachowania energii mechanicznej:

$$\int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) = U_1 - U_2$$

gdzie $U_1 = U(x_1 y_1 z_1)$, $U_2 = U(x_2 y_2 z_2)$. Lewa strona powyższego równania przedstawia nam pracę wykonaną przy przesunięciu masy od punktu 1 do 2. Wyobraźmy sobie

drogę od 1 do 2 i niech się ona przesunie o Δx.

Jaka potrzebna jest do tego praca elementarna?

Fig. 52.

Będzie to iloczyn ze siły X i elementu drogi Δx. Po prawej zaś stronie będzie różniczka funkcyi U. Będzie więc

$$X \Delta x = U(x, y, z) - U(x + \Delta x, y, z)$$

Rozwijając prawą stronę według Taylora, jest to tu dozwolone, bo funkcya U ma oznaczone wartości i pochodne, dosta-

niemy po zniesieniu się pierwszego wyrazu:

$$X\Delta x = -\Delta x \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dots$$

Po opuszczeniu wyrazów począwszy od drugiego, dostajemy:

$$X\Delta x = -\Delta x \frac{\partial U}{\partial x}$$

Analogiczne przesunięcie możnaby sobie pomyśleć względem y i z. Dostaniemy taksamo:

$$Y\Delta y = -\Delta y \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z\Delta z = -\Delta z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Stąd zaś mamy: $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Co dowodzi słuszności naszego twierdzenia.

Damy teraz jeszcze przykłady ruchu odbywającego się w przestrzeni.

1. Ruch ciała rzuconego bez uwzględnienia oporu. Ruch ciała rzuconego pod kątem dowolnym do poziomu α, gdy nie zwracamy uwagi na opór powietrza, odbywa się pod wpływem sił:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

Trzebaby właściwie dodać jeszcze jedno równanie. Przewidujemy jednak, że ruch będzie płaski i dlatego trzeciego wymiaru z

nie uwzględniamy: Wobec możności składania i rozkładania sił i wynikającej już z tego możności składania i rozkładania prędkości oraz dróg, postępujemy z każdem z danych nam równań, które są równaniami współczesnemi, tak jakby każde z nich samo tylko było. Tu więc wykonując kolejne całkowania dostajemy:

$$\frac{dx}{dt} = b_1 \qquad x = a_1 + b_1 t$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + b_2 \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + b_2 t + a_2$$

Dostaliśmy tak równania ruchu, w które wchodzą cztery stałe całkowania: a_1, b_1, a_2, b_2, które określamy zazwyczaj z położenia początkowego i prędkości początkowej. Załóżmy teraz, żeśmy tak dobrali układ nasz, iż dla $t=0$, będzie $x=y=0$, prędkości zaś początkowe będą: $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = b_1$ $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = b_2$. Widać wprost z równań, że $a_1 = a_2 = 0$. Równania nasze upraszczają się do formy:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 t$$

$$x = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t$$

Można je jeszcze inaczej napisać z uwagi, że prędkość wypadkowa $c = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2}$ jest nachylona do osi $x^{ów}$ pod kątem α i że stąd



Fig 53.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c\cos\alpha \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = c\sin\alpha$$, a mianowicie:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + ct\sin\alpha$$
$$x = ct\cos\alpha$$

Gdybyśmy z tych dwu równań wyrugowali czas t, dostalibyśmy równanie paraboli. Ruch więc odbywa się po paraboli. Prędkość początkowa jest dana. Ze wzrostem czasu prędkość składowa $\frac{dy}{dt}$ stale maleje. Wartość zero będzie miała, gdy $-gt+b_1=0$, czyli dla $t=\frac{c\sin\alpha}{g}$. Potem będzie już miała wartość ujemną. Wartość jednak c, wobec stałości $\frac{dx}{dt}$ będzie początkowo tylko do czasu $t=\frac{c\sin\alpha}{g}$ maleć, potem zaś będzie wzrastać.

Dla $t=\frac{c\sin\alpha}{g}$ osiągnie funkcya y maximum, tj będzie to najwyższy (kulminacyjny) punkt, jaki ciało rzucone osiągnie. Spadnie zaś na ziemię, czyli $y=0$, dla czasu $t=\frac{2c\sin\alpha}{g}$. Stąd wnioskujemy o symetryczności drogi wznoszenia się ciała i opadania i o dalekości rzutu. Wynosić ona będzie:

$$x = \frac{2c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{g}.$$ Równaniu zadość czynią dwie wartości na kąt α, a mianowicie α i $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Stąd zapomocą dwu elewacyj możemy osiągnąć tęsamą odległość; znajduje to zastosowanie w strzelaniu z moździerzy.

Możnaby dla tego ruchu stwierdzić prawo o zachowaniu energii mechanicznej. Siły tu działające są potencyalne, a potencyał, jakeśmy to już na str 65 zauważyli jest $U=mgy$.

Jeśli ma zachodzić prawo zachowania energii, to musi zachodzić równanie: $\frac{m}{2}V^2 + U = Const.$ Mamy zaś dla naszego ruchu: $V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (c\cos\alpha)^2 + (-gt + c\sin\alpha)^2 =$

$$= c^2 + g^2t^2 - 2gt\,c\sin\alpha.$$ Wstawiając to w powyższe równ. dostajemy: $(c^2 + g^2t^2 - 2gtc\sin\alpha)\frac{m}{2} + (-\frac{gt^2}{2} + ct\sin\alpha)mg = \frac{mc^2}{2} = Const.$

2. Rozważmy teraz ruch ciała rzuconego pod pewnym kątem do poziomu i uwzględnijmy opór powietrza. Przyjmijmy, że opór ten jest proporcyonalny do pierwszej potęgi prędkości. Założenie to czynimy dla prostoty rachunku, a możemy je czynić i przezto nawet oddawać w znacznem przybliżeniu rzeczywisty przebieg ruchu, mając experymentalnie stwierdzone prawo proporcyonalności oporu do prędkości. Od nas tedy zależy, jaki ciało ma mieć opór w czasie ruchu, bo możemy dostosować prędkość. Wobec tego załóżmy opór $\Omega = -\beta V$. Przewidując znowu, że ruch będzie płaski, zbudujemy równania:

$$X = -\beta V\cos\gamma$$
$$Y = -mg - \beta V\sin\gamma$$

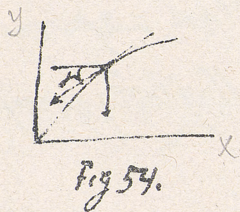


Fig 54.

gdzie γ oznacza kąt zawarty między chwilową styczną do krzywej drogi, a poziomem.

Wobec tego, że $\frac{dx}{dt} = V\cos\gamma$, $\frac{dy}{dt} = V\sin\gamma$, możemy napisać równania nasze w formie odmiennej:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - \beta\frac{dy}{dt}$$

Każde z tych równań wobec niezależności ich wzajemnej możemy oddzielnie całkować. Pierwsze z tych równań jest takie samo jak w przykładzie 2. str 56. Mając równania różniczkowe takiego kształtu, wiemy z góry, że całka jego będzie funkcya exponencyalna z dwoma stałemi całkowania. Zgadujemy, że będzie to

$$x = Ae^{-t\frac{\beta}{m}} + B$$

Upochadniając tak znalezioną całkę dwukrotnie i wstawiając wartości na $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{d^2x}{dt^2}$ w równanie różniczkowe, widzimy, że się sprawdza.

W celu rozwiązania drugiego równania różniczkowego, kładziemy: $\frac{dy}{dt} = v$. Stąd

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \beta v$$

$$\frac{m\,dv}{mg+\beta v} = -dt$$

Co całkując i zaliczając wypadający $-\log mg$ do stałej dostajemy

$$\log(mg+\beta v) = -\frac{\beta}{m}t + C$$

$$mg+\beta v = e^{C-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\frac{dy}{dt} = v = -\frac{mg}{\beta} + e^{C-\frac{\beta t}{m}}$$

$$y = -\frac{gmt}{\beta} - Ce^{-\frac{\beta t}{m}} + D$$

Dostaliśmy tak dwie całki x i y z czterema stałemi całkowania A, B, C, D.

Przystąpimy do oznaczenia tych stałych z warunków początkowych. Ponieważ chcemy znaleść wyjaśnienie czterech stałych, więc damy sobie cztery warunki początkowe. Niech mianowicie dla $t=0$, będzie $x=0$, $y=0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = c\sin\alpha$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c\cos\alpha$. Stąd zaraz mamy: $A=-B$; $D=C$;

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = -\frac{gm}{\beta} + \frac{C\beta}{m} = c\sin\alpha$$



Fig 55

$$C = D = \frac{mc\sin\alpha}{\beta} + \frac{m^2 g}{\beta^2} = \frac{m}{\beta}\left(c\sin\alpha + \frac{mg}{\beta}\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -\frac{\beta}{m} A e^{-t\frac{\beta}{m}}\Big)_{t=0} = -\frac{\beta}{m} A = c\cos\alpha$$

$$A = -B = -\frac{m}{\beta} c\cos\alpha$$

Kładąc jeszcze dla krótkości $\frac{\beta}{m} = \lambda$ i wstawiając to wszystko w znalezione równania ruchu, napiszemy je w postaci:

$$x = \frac{c\cos\alpha}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$$y = -\frac{gt}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left(c\sin\alpha + \frac{g}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

Dyskusja tych równań ruchu jest już nieco trudniejsza, bo wyrażenia są złożone. Zastanówmy się np. najpierw, jaki będzie tor w różnych chwilach czasu. Co do położenia początkowego, to wiemy z warunków do oznaczenia stałych całkowania, że $x=0$ i $y=0$.

Obrazu z równania widzimy, że dla wzrastającego t wzrasta też x, ale tylko do pewnej granicy. Dla $t=\infty$, $x\Big]_{\infty} = \frac{c\cos\alpha}{\lambda}$.
Dla dyskusyi równania na y, zauważymy, że jest to wyrażenie złożone z dwu członów, z których pierwszy jest stale ujemny, drugi stale nieujemny, wzrastający ze wzrostem t tylko do pewnej górnej granicy asymptotycznie. (Zakładamy, że c, $\sin\alpha$, g, λ są dodatnie). Dla małego t drugi człon ma przewagę, wartości na y są dodatnie, przy pewnem t ma y wartość maxymalną, potem zyskuje drugi człon przewagę i ciało rzucone, jak to już łatwo widzieć, stale się zniża zbliżając się asymptotycznie do pewnej prostej równoległej do osi $y$ów w oddaleniu od początku układu o $\frac{c\cos\alpha}{2}$. Ruch się więc odbywa po zdeformowanej paraboli. Analogicznie możnaby się pytać o to, jakie prędkości ma ciało w tych warunkach w różnych czasach. Poprzód mieliśmy wielkości prędkości składowych dla $t=0$. Były to mianowicie $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c\cos\alpha$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = c\sin\alpha$. Zapytamy, jakie będą dla $t=\infty$; oto $\left(\frac{dx}{dt}\right)_\infty = 0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_\infty = -\frac{g}{\lambda}$. Wnioskujemy stąd, że po upływie bardzo długiego czasu ciało poruszać

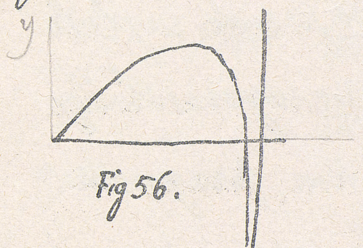


Fig 56.

się będzie z prędkością prawie jednostajną, bo przecież $-\frac{g}{k}$ jest wielkością stałą. Ciekawy to i może nie oczekiwany wniosek. Możnaby sobie postawić pytanie, jak się będzie odbywał ruch, gdy założymy, jak to w praktyce ma zastosowanie, że opór jest proporcyonalny do kwadratu, sześcianu, czwartej potęgi prędkości. Oczywiście, że są to już zagadnienia trudniejsze, bo już trzeba będzie oddzielać od siebie zmienne, by można całkować. Zauważymy tu tylko, że opór ośrodka odgrywa tu bardzo znaczny wpływ. Widać to np. stąd, że donośność karabinu wojskowego, z którego pocisk wylatuje z prędkością 600 m/sek bez oporu powietrza wynosiłaby około 40 km, w praktyce zaś wynosi do 4 km, przyczem zauważyć trzeba, że elewacya największa dla osiągnięcia największej dalekości nie wynosi jak w teoryi 45° tylko około 36°. W praktyce dochodzi się do dat owych na podstawie experymentów.

W celu swobodniejszego opisywania ruchów wprowadzimy niektóre ogólniejsze uwagi co do sposobów rozkładania sił. Podobnie jak przyspieszenia lub prędkości możemy też i siły dość dowolnie rozkładać. Dotąd

rozkładaliśmy je w kierunkach osi układu prostokątnego. Często jest użyteczną rzeczą rozkładać siły na siły w kierunku stycznym do toru i normalnym. W symbolice wektorowej przystąpimy do tego rozkładu tak: siła f wyrazi się

$$f = m\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt},$$

gdzie $\mathfrak{v} = v \cdot \mathfrak{W}$ oznacza prędkość o bezwzględnej wartości v, o kierunku zaś $\mathfrak{W}$. Tak v, jakoteż wektor jednostkowy $\mathfrak{W}$ jest zmienny z czasem. Stąd

$$f = m\frac{d}{dt}(v \cdot \mathfrak{W}) = m\,\mathfrak{W}\frac{dv}{dt} + m v \frac{d\mathfrak{W}}{dt}$$

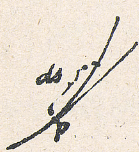


Fig 57.

Wobec $\frac{d\mathfrak{W}}{dt} = \frac{d\mathfrak{W}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$, oraz $\frac{ds}{dt} = v$, mamy:

$$f = m\,\mathfrak{W}\frac{dv}{dt} + m v^2 \frac{d\mathfrak{W}}{ds}$$

Pierwszy składnik oznacza siłę składową w kierunku $\mathfrak{W}$ t.j. stycznym o wartości bezwzględnej $m\frac{dv}{dt}$. Siła ta przyspiesza ruch. Dla oznaczenia wartości składnika drugiego wprowadzimy pojęcie promienia krzywizny R. Zauważymy trójkąt 120. jest on podobny do trójkąta utworzonego przez wektory,

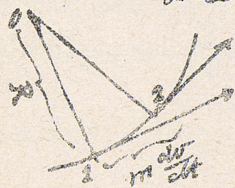


Fig 58.

które jako takie możemy zaczepiać w jednym i tymsamym punkcie 0', $\mathfrak{v}_1$ i $\mathfrak{v}_2$ prędkości i trzeci wektor do przyspieszenia. Z podobieństwa tych trój-

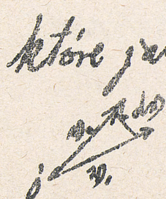


Fig 59.

kątów, podobnie jak to zrobiliśmy na str 41 przy rozważaniu rozkładu przyspieszeń w tych samych co tu kierunkach, wnioskujemy:

$$\frac{mv^2}{\left|\frac{ds}{d\Theta}\right|} = \frac{mv^2}{R}$$

w czem mamy wyrażoną bezwzględną wartość drugiego składnika. Kierunek tej drugiej siły składowej jest w kierunku promienia krzywizny w punkcie 1. a więc w kierunku normalnym do toru. Siła ta gra rolę siły tzw <u>dośrodkowej</u> lub <u>odśrodkowej</u> tj siły, która powoduje zakrzywienie toru.

Zauważyliśmy (str 36), że do opisu ruchu używać można spółrzędnych biegunowych. Dogodnem jest to zwłaszcza wtedy, jeśli mamy do czynienia z siłami wychodzącemi z punktów, (z siłami więc których siedzibą są masy).

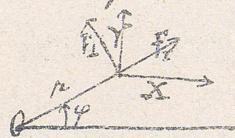


Fig 60.

Ruch zapomocą spółrzędnych biegunowych opiszemy podając równania:

$$r = f_1(t)$$
$$\varphi = F_1(t)$$

Od tych równań można w jednej przejść do układu prostokątnego przez wzory: $x = r\cos\varphi$

$$y = r\sin\varphi$$

Z tych zaś wzorów można przejść do wyrażeń siły przez powtórne upochodnienie względem t.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{dt}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - r\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \Big| m.\cos\varphi \Big| -m.\sin\varphi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\varphi + 2\frac{dr}{dt}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - r\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \Big| m.\sin\varphi \Big| m\cos\varphi$$

Mnożąc ostatnie przyspieszenia przez masę m otrzymamy siły składowe w kierunkach x i y. Z tych zaś każdą można rozłożyć w kierunku promienia wodzącego r i w kierunku normalnym do tegoż promienia. Składając teraz składowe poprzedniego rozkładu siły przypadające w jeden kierunek razem tj. sumując je poprostu, dostaniemy wzory na siłę składową w kierunku promienia F_r i i w kierunku normalnym do promienia F_1. Rachunkiem zrobi się to mnożąc przyspieszenia przez liczby obok wypisane i dodając je odpowiednio do siebie. Będzie:

$$F_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$$

$$F_1 = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi \qquad \text{czyli}$$

$$F_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

$$F_1 = m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]$$

Drugie z tych wyrażeń z uwagi, że $\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 2r\frac{dr}{dt} + r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ można napisać prościej, i stąd mamy dwa wzory:

$$F_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right].$$

$$F_1 = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Siłę Newtonowską w kierunku danym x wyrażamy $m\frac{d^2x}{dt^2}$; gdy zwrócimy uwagę na pierwszy wzór nasz, widzimy, że dostalibyśmy wyrażenie takie same, gdybyśmy opuścili drugi składnik. Czemu jednak ten składnik drugi wchodzi w to wyrażenie? Przy sile Newtona kierunek x jest stały; tutaj zaś zmieniać się kierunek r zależnie od czasu, i to właśnie jest uwzględnione przez składnik drugi. Gdybyśmy mianowicie założyli, że r jest stałe, a zmienia się tylko φ, to ruch odbywałby się po kole. Ruch ten byłby jak wiemy, jednostajny. Przyspieszenie bowiem byłoby tylko ku środkowi, i istniałaby tylko jedna siła (centralna) dośrodkowa wynosząca na podstawie wzoru str. 76.

$\frac{mv^2}{r} = \frac{m\,r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{r}$, a więc właśnie to, co oznacza nasz drugi składnik. Interpretacya drugiego wzoru byłaby na razie może nie dość jasna. Spotkamy się jednak z nim zaraz w następnem zastosowaniu i tam sobie to wyjaśnimy.

---

3. Ruch planet dokoła słońca. Kepler postawił trzy

sławne prawa o ruchu planet około słońca: I. Planety krążą po elipsach dokoła słońca, które znajduje się w jednem z ognisk elipsy. II. Promienie wodzące zakreślają w równych czasach równe pola, co też inaczej wypowiadamy: prędkość wycinkowa planety jest stała. III. Kwadraty czasów obiegu pozostają w stosunku trzecich potęg średnich odległości planet od słońca. Na niebie nie widać naturalnie elips zakreślanych przez planety tylko ruchy względne (względem ziemi). Krzywe oddające te ruchy są zawiłe i starano się je dawniej opisać zapomocą cykloidy i epicykloidy. Dopiero Kopernik rozłożył owe ruchy na ruch ziemi i na ruchy własne planet po kole względnie elipsie. My przyjmiemy prawa Keplera stwierdzone empirycznie (Tycho de Brahe) za punkt wyjścia i postaramy się wyciągnąć stąd wnioski. Zwracając się do prawa II. Keplera i ubierając go w formułę matematyczną, powiemy: promień wodzący zakreśla w bardzo krótkim czasie trójkąt o podstawie $r d\varphi$, a wysokości r. Powierzchnia tego trójkąta

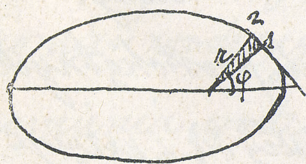


Fig 61.

$dS = \frac{r^2 d\varphi}{2}$. Dzieląc obie strony tej równości przez dt dostajemy to, co nazywamy prędkością wycinkową. Według II prawa

wa zaś: Prędkość wycinkowa:

$$\omega = \frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = Const.$$

Stąd $\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$, a stąd, przypominając sobie wyrażenie na siłę normalną mamy:

$$F_\perp = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0.$$

Wnioskujemy stąd, że ze siły wypadkowej czynnej przy ruchu planet, którą myślimy sobie rozłożoną na składowe: normalną i w kierunku promienia wodzącego: F_r czyli centralną [którą jednak należy starannie odróżnić od składowej w kierunku promienia krzywizny], zostaje czynną tylko ta ostatnia. Powoduje ona, jak wiemy, zakrzywienie toru.

Ogólnie powiemy: charakterystyczną cechą sił centralnych jest: to, że $F_\perp = 0$. Gdy bowiem założymy ruch centralny, to dostajemy taką konsekwencyę, a gdy naodwrót założymy $F_\perp = 0$, to dostaniemy cechę ruchu centralnego: prędkość wycinkowa $\omega = Const.$ Gdyby natomiast $F_\perp \neq 0$, to ruch już nie byłby centralny.

Do wniosków tych przy użyciu spółrzędnych prostokątnych dojdziemy tak: Gdy punkt poruszy się z pozycyi 1 do 2, promień zakreśli trójkąt: 0 1 2. Pole tego trójkąta (cieniowane na rycinie) jest:

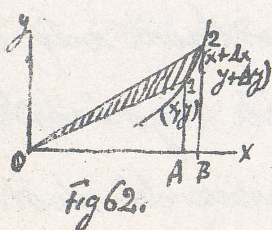


Fig 62.

$$0\,1\,2 = 0B2 - 0A1 - AB21 = \frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{(2y+\Delta y)\,\Delta x}{2} =$$

$= \frac{x\Delta y - y\Delta x}{2}$. Dzieląc tę powierzchnię trójkąta przez czas Δt i przechodząc do granicy, dostajemy prędkość wycinkową:

$$w = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

która według Keplera jest stała. Z tego wzoru można wrócić w jednej chwili do wzoru poprzód wyprowadzonego przy pomocy spółrzędnych biegunowych na prędkość wycinkową, zakładając $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Zostając jednak przy wzorze ostatnim, dostajemy:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} - x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} = 0, \text{ skąd}$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{y}{x}$$

i na mocy Newtonowskiego określenia sił, mamy też:

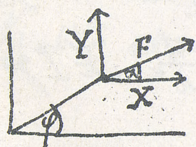


Fig 63.

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x} = tg\,\alpha$$

co podaje nam kierunek siły wypadkowej.

Jeśli przez φ naznaczymy kąt, jaki zamyka promień wodzący z osią $x$ów, to każdorazowy kierunek promienia wodzącego naznaczymy: $\frac{y}{x} = tg\varphi$. Stąd wnioskujemy, że $tg\alpha = tg\varphi$, czyli $\alpha = \varphi + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Znaczy się to, że siła wypadkowa naszego ruchu ma kierunek promienia wodzącego, mamy zatem do czynienia ze siłą centralną. Możnaby odwrotnie to dowieść

to cośmy już wyżej dowiedli, że gdy siła jest centralna to prędkość wycinkowa $w = const.$

Teraz wyciągniemy wnioski z przyjęcia I-go prawa Keplera. Równanie elipsy we współrzędnych biegunowych przedstawia się:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

gdzie parametr $p = \frac{b^2}{a}$, mimośród numeryczny $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Gdybyśmy się chcieli np. przekonać, że równanie to przedstawia elipsę, którą we współrzędnych prostokątnych przedstawiamy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dość użyć transformacji $x = e + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Po wstawieniu tych wzorów w znane równanie elipsy przekonalibyśmy się, że się spełnia identycznie.

Chcemy wyciągnąć wnioski co do siły $F_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$. Z II-go prawa wiemy, że $r^2\frac{d\varphi}{dt} = C$, skąd $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$. Z I-go prawa mamy:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varepsilon p\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{p.\varepsilon.\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\,\frac{C}{r^2} = \frac{\varepsilon.\sin\varphi\, C}{p}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\varepsilon\cos\varphi.\, C}{p}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon C^2\cos\varphi}{p r^2}$$

Teraz możemy wyrazić już siłę centralną:

$$F_r = m\left[\frac{\varepsilon C^2\cos\varphi}{pr^2} - r\left(\frac{C}{r^2}\right)^2\right] = m\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{\varepsilon\cos\varphi}{p} - \frac{1}{r}\right]$$

czyli wobec $\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p} = \frac{1}{r}$,

$$F_r = -\frac{mC^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}$$

Czynnik $\frac{mc^2}{p}$ jest wielkością stałą. Mamy więc prawo że siła centralna F_r jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości przy ruchu centralnym. Jest to wniosek Newtona. Siła F_r jest siłą grawitacyjną.

Wyciągniemy jeszcze wnioski z III prawa Keplera. Porównując ono ruchy różnych planet ze sobą i dai się wyrazić

$$\frac{T^2}{a^3} = \lambda \quad (\text{stała})$$

bo według niego $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \dots = \lambda$, gdzie T oznacza czas obiegu, a połowę osi wielkiej elipsy. Wobec tego, że całe pole elipsy równa się $ab\pi$, prędkość zaś wycinkowa jest stała $= \frac{c}{2}$

$$T = \frac{ab\pi}{\frac{c}{2}} = \frac{2ab\pi}{c}.$$

Stąd:

$$\lambda = \frac{4a^2b^2\pi^2}{c^2a^3} = \frac{4\pi^2}{c^2}p \quad , \text{ stąd } \quad \frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2}{\lambda}$$

Na siłę centralną dostaniemy zatem wzór:

$$F_r = \frac{4\pi^2}{\lambda}\frac{m}{r^2}$$

Znaczy się to, że siła grawitacyjna jest wprost proporcjonalna do masy, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości. Prawo to jest ogólnie ważne dla wszystkich planet. $\frac{4\pi^2}{\lambda}$ jest współczynnikiem stałym.

Zauważymy, że żadne z praw Keplera nie jest spełnione dokładnie, najmniej zaś dokładnie III-cie prawo. Zachodzą

różne perturbacye, ruch nie odbywa się ściśle około słońca, tylko koło środka masy całego układu naszego planetarnego. Pochodzi to stąd, że masy pozostałych planet wchodzą w grę. Jowisz np. mający $\frac{1}{1000}$ części masy słońca, wpływa już na położenie środka masy.

Prawa podane przez Keplera wytłumaczył Newton za pomocą siły grawitacyjnej. Trzeba zauważyć, że dzisiaj unika się od czasów Kirchhoffa słowa <u>tłumaczenie</u>. Kirchhoff powiedziałby, że Newton opisał ruchy planet, a nie wytłumaczył. Za Kirchhoffem poszli inni eliminując pojęcie <u>przyczyny</u> i <u>skutku</u>. Mach powiada, że pojęcia te są antropomorficzne. Gdy mówimy o sile grawitacyjnej, grawitacyi, to mamy na myśli tylko to, że stwierdzamy <u>regularność</u> zjawiska, że więc zjawisko regularnie odbywające się opisujemy. Można się na to godzić, jeśli się słowo opisywać bierze w tak obszernym zakresie.

Podobnie jak w powyższych przykładach postąpilibyśmy gdybyśmy mieli opisać ruch drgający. W dotychczasowych rozważaniach uważaliśmy punkt jako swobodny. Na niego działały różne siły i pod ich wpływem punkt wyko-

nywać pewne ruchy. Teraz przystąpimy do mechaniki punktu nieswobodnego.

B. Dynamika punktu nieswobodnego.

W praktyce jest zwykle swoboda ruchu punktu materyalnego ograniczona, to znaczy się, że punkt musi zostawać w czasie ruchu albo na jakiejś powierzchni albo na jakiejś krzywej. Np. przy wahadle matematycznem stożkowem (Punkt m. umocowany na nitce, utwierdzonej drugim końcem w pewnym punkcie statynu i spełniającej wszystkie warunki promienia kuli) są dwie swobody ruchu; punkt może się poruszać po powierzchni kuli. U wahadła bifilarnego (= punkt umocowany na dwu takich nitkach utwierdzonych drugimi końcami w dwu różnych stałych punktach) jest tylko jedna swoboda ruchu; punkt może się poruszać po obwodzie koła. Prócz ograniczeń ruchu do powierzchni i krzywej mogą być inne np. połączenia jednostronne: tak np. ciało rzucone na stół nie może doznawać przesunięć ujemnych, bo przeszkadza temu powierzchnia stołu. W te ostatnie jednak ograniczenia na razie nie wchodzimy i zajmujemy się tylko poprzedniemi. Położenie każdorazowe punktu ograniczone się w tych

razach, albo do powierzchni danej równaniem $F(xyz)=0$, albo do krzywej danej przez punkty wspólne dwu równań powierzchni $\Phi(xyz)=0$ i $\Psi(xyz)=0$.

Przy opisywaniu ruchów podlegających powyższym ograniczeniom swobody możemy nieraz zgóry przewidzieć sposób postępowania. Gdy np. punkt ma się poruszać po krzywej, to wobec

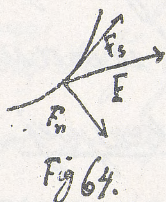


Fig 64.

tego, że siłę F możemy rozłożyć na składową styczną F_s i składową normalną F_n, przyczem ta ostatnia nic nas nie obchodzi, bo ruch się ma odbywać po krzywej, będziemy mieli ruch określony przez podanie siły stycznej. Siłę styczną określiliśmy wyżej równaniem:

$$F_s = m\frac{dv}{dt}$$

Mając określone F_s dla każdego punktu krzywej, dostajemy równanie różniczkowe, z którego już wyptywać będzie ruch. Metoda ta daje się np. zastosować przy wahadle, gdy ruch ma się odbywać w płaszczyźnie. Uważajmy wahadło wychylone o kąt φ.

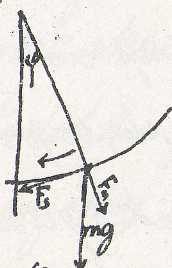


Fig: 65

Na punkt działa siła mg, którą rozkładamy na siłę normalną F_n, która nas nic nie obchodzi i siłę styczną: $F_s = -mg\sin\varphi$.

Wobec wzoru na siłę styczną mamy równanie różniczkowe:

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\varphi.$$

Jeśli s oznacza łuk, i jeśli łuk ten liczymy od pierwszej pozycji wychylenia i prędkość rachujemy w kierunku strzałki, to wobec tego, że przytem kąt φ maleje, dajemy znak —. Piszemy zatem:

$$v = \frac{ds}{dt} = -a\frac{d\varphi}{dt}$$

gdzie a oznacza długość nitki. Stąd

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi .$$

Dostaliśmy tak równanie mechaniczne określające ruch wahadła. Chodzi o całkowanie. Tu sprawa nieco trudniejsza, bo całka tego równania jest eliptyczną i nie da się w skończonej formie wyrachować tylko musimy się uciekać do rozwinięć na szeregi nieskończone. Na razie jednak uprościmy sprawę w ten sposób, że się ograniczymy do wychyleń bardzo małych, takich, że $\sin\varphi$ będziemy mogli zastąpić przez kąt φ. Dostaniemy:

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\varphi$$

Teraz jest to już znany nam typ równań różniczkowych. Wiemy że ruch będzie harmoniczny periodyczny, całka będzie:

$$\varphi = A\sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Łatwo się o tem przez podwójne wyprowadzanie przekonać:

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\alpha\cos(\alpha t + \varepsilon)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -A\alpha^2\sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Widzimy, że równanie różniczkowe się spełnia dla $\alpha = \sqrt{\frac{g}{a}}$

Zatem:

$$\varphi = A \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} + \varepsilon\right)$$

Peryod wynosi $T\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\pi$, zatem okres ruchu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Do określenia są jeszcze dwie stałe całkowania A i ε. W tym celu niech dla $t = t_0 = 0$, będzie $\varphi = \varphi_0$ $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$. Będzie:

$$\varphi_0 = A \sin \varepsilon$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = A\sqrt{\frac{g}{a}} \cos\varepsilon = 0$$

To ostatnie równanie mogłoby zachodzić albo dla $A = 0$, albo dla $\cos\varepsilon = 0$, albo dla obu tych wypadków równocześnie. Atoli $A \neq 0$ z powodu $\varphi_0 \neq 0$. Zatem równanie ostatnie określa nam $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, ~~$\frac{3}{2}\pi$, ...~~ Z tąd dostajemy zaraz na określenie A z pierwszego równania: $A = \varphi_0$ amplituda. Wprowadzając to w równanie ruchu, mamy:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

Tak więc mamy już ruch przy powyższych założeniach w zupełności określony. Metoda atoli jakiejśmy tu użyli nie da się ogólnie stosować. W metodzie tej rozkładaliśmy siłę na styczną i normalną, przyczem ta ostatnia nic nas nie obchodziła, a ruch cały był określony przy pomocy siły stycznej. Co jednak będzie, gdy ruch ma się odbywać np. po powierzchni?

Jak mamy wtedy siły rozkładać? Metoda poprzednia nie daje nam tu wskazówek. Pomyślmy bowiem sobie, żeśmy i w tym razie rozłożyli siłę na normalną (na którą więc nie zważamy) i na dwie styczne do danej powierzchni. Nasze poprzednie równanie: $m\frac{dv}{dt} = F_s$ odnosi się do siły stycznej w kierunku chwilowego ruchu. Teraz jednak na powierzchni możemy w każdej chwili wykreślić nieskończenie wiele krzywych o różnych kierunkach. Wszystkie te kierunki są równie możliwe. Nie wiemy więc jaki z nich będzie kierunkiem drogi i jak mamy siły rozkładać. Do rozwiązywania takich zadań służy ogólna:

Zasada D'Alemberta.

Różne są sposoby wyprowadzania tej zasady. Jeden z prostszych jest np. taki: Punkt zmuszony poruszać się po pewnej powierzchni lub krzywej możemy uważać za swobodny, gdybyśmy do siły zewnętrznej F działającej na punkt dodali jeszcze siłę Φ, którą wywiera ta powierzchnia lub krzywa po której się punkt jest zmuszony poruszać. Siła Φ nie jest naturalnie żadnem tarciem; powierzchnie i krzywe przyjmujemy jako idealnie gładkie. Gdyby jakie tarcie należało uwzględnić, to włączamy

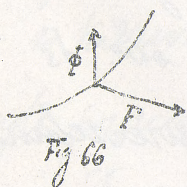


Fig 66

je do siły F. Wobec tego można dla tego punktu zakładać równania Newtonowskie. Rozkładając tedy siłę F na trzy składowe X, Y, Z, analogicznie zaś siłę Φ na ξ, η, ζ, mamy:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \xi \quad \Big| \ \delta x$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \eta \quad \Big| \ \delta y$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \zeta \quad \Big| \ \delta z$$

Powiedzmy teraz, że punkt się przesunął o mały łuczek ds po swej powierzchni, którego składowe oznaczmy $\delta x, \delta y, \delta z$. Mnożąc powyższe równania przez odpowiednie przesunięcia składowe, dodając je do siebie i porządkując, dostajemy wyrażenie:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = -\left[\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z\right]$$

Prawa strona tego wyrażenia przedstawia nam pracę wykonaną przez siłę przymusową Φ przy przesunięciu punktu o element łuku ds. W nawiasie bowiem mamy iloczyny ze sił składowych i elementów drogi. Jeśli przesunięcie owe ds będzie zgodne z warunkiem ruchu tj. po powierzchni lub krzywej zostanie uskutecznione, czyli jak to krótko mówimy jeśli przesunięcie owe będzie przygotowane *), to wobec małości łuku ds będzie ono prostopadłe do siły Φ. Natenczas

*) Niemcy nazywają takie przesunięcia Virtuelle Verschiebungen lub virtuelle Geschwindigkeiten, Francuzi: virtuelles vitesses.

praca jest równa zeru i tedy wyrażenie w nawiasie równa się zeru. Stąd dostajemy wyrażenie, do którego siły dążyli:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

gdzie, akcentujemy to, $\delta x, \delta y, \delta z$ są dobrane zgodnie z warunkami ruchu tj. uwzględnione jest w nich równanie powierzchni lub krzywej, po której się ruch odbywa.

Historyczny wywód tej zasady opiera się na pojęciu równowagi: Dany punkt, na który działają siły zostanie w równowadze, jeśli siła wypadkowa $f = 0$, lub jeśli praca wykonana przy przesunięciu w jakimbądź kierunku jest równa zeru:

$$(f\,dr) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$$

Warunek ten równowagi wypowiedziany dla punktu swobodnego redukuje się dla punktu zmuszonego pozostawać na pewnej powierzchni lub krzywej do tego, że praca wykonana w kierunku stycznym do tejże powierzchni lub krzywej czyli praca dla przesunięcia przygotowanego ma być równa zeru. To co dotąd powiedzieliśmy tu jest ważne dla stanu równowagi. Ze stanu równowagi do ruchu przejść można łatwo zapomocą zasady D'Alemberta opiewającej: Siły, które się nie równoważą, tylko powodują ruch, równo-

ważyłyby się, gdybyśmy od sił zewnętrznych odjęli siły im równoważne tj. iloczyny z masy i przyspieszeń. Zasada ta oczywista, bo nie wyraża ona nic innego jak równania Newtonowskie siły napisane w formie:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Jeśli przesunięcie przygotowane jest δs, którego składowe są: $\delta x, \delta y, \delta z$, to oczywiście zachodzi równość:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

do którejśmy doszli.

W symbolice wektorowej moglibyśmy zasadę tę wyprowadzić tak. Punkt zmuszony do pozostawania na pewnej powierzchni lub krzywej, na który działa siła f moglibyśmy uważać za swobodny, gdybyśmy do siły f dodali jeszcze siłę f' wywieraną przez powierzchnię lub krzywą. Można wtedy stosować równania Newtona i napisać

$$f + f' = m\frac{d^2r}{dt^2} \qquad \text{czyli}$$

$$f - m\frac{d^2r}{dt^2} = -f'$$

f' jest siłą przymusową. Pracę wyrażamy iloczynem skalarnym siły i przesunięcia. Będzie więc:

$$\left(f - m\frac{d^2r}{dt^2}\right)dr = -f'dr$$

Przesunięcia, jakie tu są możliwe, są styczne do danej powierzchni czy też krzywej, f' zaś może mieć kierunek tylko normalny. Powierzchnię bowiem supponujemy jako idealnie gładką. Stąd

$$f' \perp dr$$

Zatem $f'dr = 0$, i stąd

$$\left(f - m\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta r = 0$$

równanie ważne dla specyalnych przesunięć δr, a mianowicie, dla przesunięć przygotowanych. Rozpisując to równanie dostajemy zasadę ruchu D'Alemberta w formie zwykłej:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

Z tego można dostać w jednej chwili specyalny wypadek równanie dla równowagi, zakładając: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$$

Jest to zasada prac przygotowanych, orzekająca, że równowaga jest wtedy, jeśli praca przygotowana jest równa zeru. Przez pracę zaś przygotowaną rozumiemy pracę wykonaną przy przesunięciu przygotowanem. (Prinzip der virtuellen Verschiebungen, Principe des vitesses virtuelles).

<u>Zastosowanie:</u> Użyteczność zasady D'Alemberta polega na tem, że mając dane a priori siły zewnętrzne X, Y, Z, oraz równanie powierzchni lub linii krzywej, po której się punkt jest zmuszony poruszać, możemy dojść do równań ruchu czysto matematycznemi operacyami.

Wrazie, gdy punkt ma zostawać na powierzchni:

$$\varphi(x\, y\, z) = 0$$

natenczas owe: δx, δy, δz, mające dawać wyraz przesunięciu przygotowanemu muszą wynikać z równania tej powierzchni. Gdy się punkt z pozycyi $(x\, y\, z)$ przesunie do $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, zostając na powierzchni to zachodzi:

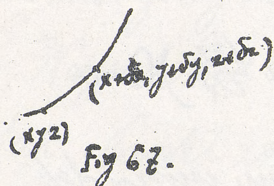


Fig 62.

$$\varphi(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = 0$$

Rozwijając ostatnie wyrażenie według Taylora, i poprzestając, co pod warunkiem ciągłości funkcyi możemy uczynić, na pierwszym wyrazie rozwinięcia, dostajemy:

$$\varphi(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) - \varphi(x\, y\, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0$$

Z tego równania i równania D'Alemberta można teraz wyrugować np. δx, zostawiając dowolne δy, δz, ale często się używa <u>metody Lagrange'a</u> czynnika

Możemy mianowicie pomnożyć równanie poprzednie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z = 0$$

przez czynnik dowolny λ i dodać je następnie do równania D'Alemberta. Dostaniemy:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

Czynnik dowolny λ możemy teraz tak dobrać, by np. ostatni wyraz stał się równy zeru. Zostaną wtedy dwa inne wyrazy, pomnożone przez całkiem dowolne: δx, δy. Jeśli więc wyrażenie z tych dwu wyrazów ma być przyrównane do zera, to warunkiem tego jest, by same nawiasy były równe zeru. Dostajemy tak trzy równania różniczkowe ruchu:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Wchodzi w nie czynnik (już teraz nie dowolny, bo poprzednim warunkiem określony) λ na razie nieznany. Kwestyą operacyi matematycznej jest pozbycie się tego czynnika, zresztą można go a posteriori obliczyć.

Wrazie gdy punkt materyalny jest skazany na zostawanie na pewnej linii określonej:

$$\varphi(xyz)=0 \qquad \psi(xyz)=0$$

natenczas musiałyby być analogicznie do poprzedniego dwa następujące wyrażenia:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z=0$$

Te pomnożone przez dowolne czynniki λ i μ i dodane do równania D'Alemberta dają:

$$\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\delta z=0$$

Jeśli w tem wyrażeniu dobierzemy λ i μ tak, żeby dwa wyrazy stały się równe zeru, niech to będą np. dwa ostatnie, to wtedy też pozostały, tu więc pierwszy wyraz, wobec dowolności przesunięcia składowego δx będzie też równy zeru. Dostaniemy tak znowu trzy równania różniczkowe ruchu:

$$X-m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

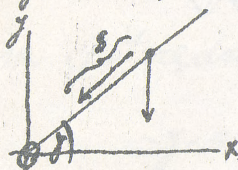
$$Y-m\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

$$Z-m\frac{d^2z}{dt^2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$$

z których znowu λ i μ na razie nieznane można wyrugować albo a posteriori obliczyć.

Damy proste przykłady na zastosowanie metody D'Alem-

1. Niech punkt ślizga się pod wpływem ciężkości po prostej pochyłej. Dla prostoty przyjmijmy, że prosta ta leży w płaszczyźnie



rysunku. Siły działające są:

$$X=0 \quad , \quad Y=-mg .$$

Fig 68.

Równanie prostej: $y = x\,\mathrm{tg}\,\gamma$. Z nie uwzględniamy, bo ruch dwuwymiarowy. $\delta y = \mathrm{tg}\,\gamma\,\delta x$.

$$\left(0 - m\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda\,\mathrm{tg}\,\gamma\right)\delta x + \left(-mg - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\right)\delta y = 0$$

Stąd

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda\,\mathrm{tg}\,\gamma = 0$$

$$-mg - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda = 0$$

równania różniczkowe ruchu. λ można np. wyrugować. Będzie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{tg}\,\gamma\left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

x i y jest tu związane. Celem rozwiązania powołujemy się na równanie dane, skąd mamy:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{tg}\,\gamma \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

i zatem:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left[1 + \mathrm{tg}^2\gamma\right] + g\,\mathrm{tg}\,\gamma = 0 \quad .$$ Stąd

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g\,\mathrm{tg}\,\gamma}{1+\mathrm{tg}^2\gamma} = -g\sin\gamma\cos\gamma$$

$$x = -g\sin\gamma\cos\gamma\,\frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$$

Dostaliśmy tak równanie ruchu, które jednak jest różne od wy-

prowadzonego na str. 42. Pochodzi to stąd, że tam liczyliśmy s w kierunku ruchu, tu zaś x jest rzutem s. Można jednak w jednej chwili do tamtego kształtu wrócić, z uwagi, że

$$ds = -\frac{dx}{\cos\gamma}\ , \quad \beta = \alpha = 0$$

Dostajemy

$$s = g\sin\gamma\,\frac{t^2}{2}$$

wzór na ruch ciała poruszającego się po równi pochyłej.

2. Wahadło matematyczne. Załóżmy, że ruch wahadła odbywa się w płaszczyźnie. Nie trzeba będzie więc uwzględniać siły składowej Z. Będzie więc:

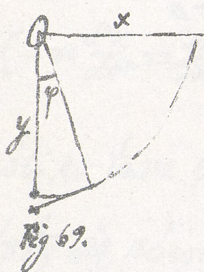


Fig 69.

$$X = 0\ , \quad Y = -mg$$

Równanie koła, po którem się punkt porusza:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0\ .$$

Stąd :

$$0 - m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda x = 0 \quad \Big|\ \frac{dx}{dt}$$

$$-mg - m\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda y = 0 \quad \Big|\ \frac{dy}{dt}$$

Z równania koła mamy:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\ .$$ Mnożąc więc poprzednie równania odpowiednio przez $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ i dodając, oswobodzimy równania od λ :

$$-mg\frac{dy}{dt} - m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

$$-g\,dy = d\,\frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]}{2}$$

$$-gy = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + Const$$

Wobec $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V^2$

$$-gy = \frac{1}{2}V^2 + Const$$

Kształt ten jeszcze jest nam niewygodny, wprowadzimy zatem spółrzędne biegunowe.

$$-y = a\cos\varphi, \quad V = -a\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{więc}$$

$$g\,a\cos\varphi = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Const$$

Aby to równanie miało kształt taki sam jak na str 87 wystarczy je względem t zróżniczkować:

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi$$

Dostaliśmy więc kształt taki sam, ale droga jest stosunkowo długa. To jest wadą metody Lagrange'a, ale zato jest ona ogólna i oszczędza nam myślenia. Wystarcza dla jej stosowania znać tylko siły działające i kształt tworu geometrycznego, na którym ma się punkt poruszać.

Zauważmy, że równanie:

$$g\,a\cos\varphi = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Const$$

wyraża po prostu zachowanie energii. Ale to można było przewidzieć bezpośrednio, bo zakładaliśmy, że ruch się odbywa pod wpływem siły ciężkości, a więc potencyalnej. Potencyał grawitacyjny jest $U = mgy$.

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$

a że suma z energii potencyalnej i kinetycznej dla sił konserwatywnych jest stała, więc:

$$mgy + \frac{m}{2}V^2 = Const,$$

a to jest tosamo co wyżej. Z zasady zachowania energii wyprowadzamy więc ten ruch najprościej. Ogólnie jeśli na punkt materyalny działają siły konserwatywne i gdy jest dana tylko jedna swoboda tj. ruch ma się odbywać po linii, to najprościej postąpimy opisując ruch, gdy wyjdziemy z zasady zachowania energii. W wypadkach zawitych zasada ta nie wystarczy, bo stąd dostajemy jedną tylko relacyę, a gdy mamy ruch dwuwymiarowy trzeba rekurować do dwu równań.

Jeszcze w trzeci sposób można wyprowadzić równanie ruchu dla wahadła matematycznego. Wobec tego, że punkt ma się poruszać po kole: $x^2 + y^2 = a^2$ jest

$$x\delta x + y\delta y = 0,$$

$$\delta y = -\delta x \cdot \frac{x}{y}$$

Uwzględniając to w zasadzie ruchu d'Alemberta, mamy:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - \left(-mg - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta x \cdot \frac{x}{y} = 0$$

$$\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + \left(g - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{x}{y}\right\}\delta x = 0$$

To możliwe, gdy nawias = 0.

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} + gx = 0$$

Rezultat ten jest taki sam jak gdybyśmy postępując według Lagrange'a uwolnili równania od czynnika λ. Przedtem posługując się metodą Lagrange'a doszliśmy do zasady zachowania energii. Teraz przepisując równanie w formie:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = gx$$

i przypominając sobie z ruchu centralnego, że nawias przedstawia podwójną prędkość wycinkową: $= a^2\frac{d\varphi}{dt}$ (str. 79, 81) napiszemy:

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = gx$$

$$a^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = gx = -ga\sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a}\sin\varphi$$

znowu równanie różniczkowe ruchu wahadła. Chodzi tylko o całkowanie tego równania. Gdy nam nie chodzi o wielką dokładność możemy sprawę uprościć, rozwijając sin według Taylora: $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$ i poprzestając na pierwszym składniku. Stąd

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a}\varphi$$

Rozwiązanie: $\varphi = A\sin(\alpha t + \varepsilon)$. Stałe A i ε określimy z pozycji początkowej i prędkości. Dostaniemy, jak już to wiemy ze str. 88: $\varphi = \varphi_0\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$.

Do tego samego rezultatu można dojść innemi sposobami.

Możemy napisać:

$$\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}dt = -\frac{g}{a}\sin\varphi . d\varphi$$

$$\frac{1}{2}d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}d(\cos\varphi)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}\cos\varphi + C$$

Stałą C można określić, gdy dana jest pozycja początkowa i prędkość tj. dla $t=0$, $\varphi=\varphi_0$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0=0$

$$0 = \frac{g}{a}\cos\varphi_0 + C \qquad \text{stąd}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} = \int\sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt$$

Gdy znowu ograniczymy się do małych wychyleń i przedstawimy:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \cancel{+ \frac{\varphi^4}{4}}$$

$$\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \cancel{+ \frac{\varphi_0^4}{4}}$$

dostaniemy:

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\int dt = \sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t + Const$$

Lewa strona:

$$\int\frac{d\frac{\varphi}{\varphi_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2}} = \arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0}$$

$$\arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0} = t\sqrt{\frac{g}{a}} + Const$$

$$\varphi = \varphi_0\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} + Const\right),$$

gdzie znowu Const oznaczyć można z warunków początkowych.

Postawiamy się teraz obliczyć ścisłej całkę równania:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a}\sin\varphi.$$

Musimy w tym celu wrócić do równania, w którem jeszcze figuruje cos in extenso:

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} =$$

Wobec: $1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$1-\cos\varphi_0 = 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ jest $\cos\varphi-\cos\varphi_0 = 2\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$

i stąd całka przyjmie kształt:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

Kładąc: $\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} = z = \sin\psi$, skąd

$$\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}d\varphi = dz = \cos\psi\, d\psi \quad \text{oraz}$$

$$d\varphi = \frac{dz \cdot 2\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}dz}{\sqrt{1-\left(z\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}}.$$

Stąd zaś całka powyższa

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}dz}{\sqrt{1-\left(z\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}\sqrt{1-z^2}\cdot\sin\frac{\varphi_0}{2}} \quad \text{i wreszcie}$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \text{Const}$$

gdzie całka po lewej stronie jest już doprowadzona do kształtu normalnego pierwszego rodzaju całek eliptycznych. Więc czas

da się przedstawić taką całkę; stąd nawzajem z jest funkcyą eliptyczną argumentu czasu. Posługując się transformacyą drugą, mamy: $dz = \cos\psi\, d\psi$, $\sqrt{1-z^2} = \cos\psi$ i stąd dostajemy:

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\psi \sin^2\frac{\varphi_0}{2}}} = t\sqrt{\frac{g}{a}} + Const$$

Ponieważ $|\sin\psi| \leq 1$, więc jeśli $|\sin\frac{\varphi_0}{2}| < 1$, to można $(1-\sin^2\psi \sin^2\frac{\varphi_0}{2})^{-\frac{1}{2}}$ rozwinąć według Newtona na szereg zbieżny. Lewa strona przedstawi się tedy:

$$\int \left[1 + \frac{1}{2}\sin^2\psi \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{3}{8}\sin^4\psi \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \dots\dots \right] d\psi$$

Całkę tę można już teraz łatwo obliczać z jaką się chce dokładnością. My w to nie wchodzimy, a weźmiemy pod uwagę wypadek szczególny, mianowicie postaramy się wyrazić okres T. Jeśli $\varphi = \varphi_0$ oznacza największe wychylenie, $\varphi = 0$ oznacza pozycyę równowagi, to odpowiednie wartości na ψ są: $\psi = \frac{\pi}{2}$ oraz $\psi = 0$. Stąd

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \dots \right] d\psi$$

$$= 4\sqrt{\frac{a}{g}} \left[\psi + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} \int \sin^2\psi\, d\psi + \dots\dots \right]_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{a}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2.4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \dots\dots \right]$$ czyli

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \ldots\ldots \right].$$

Jest to dokładny wzór na okres wahania wahadła matematycznego. O ile się ograniczymy do wychyleń małych, natenczas błąd powstały przez opuszczenie składników szeregu począwszy od drugiego będzie nieznaczny tak, że będzie zachodził wzór na okres wahania już poprzód wyprowadzony:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Ciekawem jest to, że według tego wzoru okres nie zależy od amplitudy: φ_0. Nie zależy on też od masy punktu materyalnego. Jest natomiast proporcyonalny wprost do pierwiastka przyspieszenia ziemskiego odwrotnie do pierwiastka długości nitki. O ile zatem przyspieszenie ziemskie i długość nitki wahadła zostaje niezmienna, to okres wahania jest stały. Jest to tw. o izochronizmie wahadła o małych wychyleniach. Poprawkę co do izochronizmu czyni wyraz drugi szeregu. Np dla $\varphi_0 = 5°$; $\sin\frac{\varphi_0}{2} = 0{\cdot}0436\ldots$ Stąd poprawka wynosić będzie: $0{\cdot}0004\ldots$ W praktyce jest ona zatem dla takich amplitud znikomo mała.

Z obserwacyi T przy znanem a i φ_0 można oznaczyć przyspieszenie ziemskie dla danego miejsca *). Zauważymy jeszcze, że w rozważaniach naszych nie uwzględnialiśmy żadnego

*) We Lwowie wynosi ono około $981 \frac{cm}{sek^2}$.

tarcia; wychodziliśmy bowiem z definicji wahadła matematycznego.

3. Wahadło stożkowe. W wahadle matematycznem punkt porusza się po łuku koła, w stożkowem zaś po czaszy kulistej. Stąd dla ujęcia w równania ruchu wahadła stożkowego metodą Lagrange'a potrzebna jest znajomość równania kuli i sił składowych X Y Z. Przyjmując, że środek kuli znajduje się w początku naszego układu, znamy jej równanie:

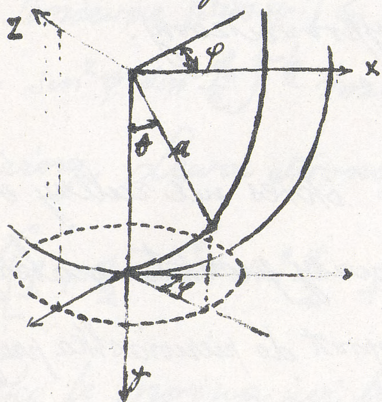


Fig 70.

$$\varphi = x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

i system równań:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

Wobec: $X=0$, $Z=0$, $Y=+mg$ system ów przejdzie na:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = +mg + 2\lambda y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 2\lambda z$$

Zakładając w celu uproszczenia $\frac{2\lambda}{m} = \mu$ dostaniemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x \qquad \Big|\ z \ \Big|\ \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = +g + \mu y \qquad \Big|\ \ \Big|\ \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mu z \qquad \Big|\ x \ \Big|\ \frac{dz}{dt}$$

Pomnóżmy odpowiednio jedno równanie przez z drugie przez x i odejmijmy. Dostaniemy:

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \text{czyli}$$

$$\frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0 \quad \text{skąd}$$

$$\text{(a)} \qquad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = \text{Const.}$$

Przy ruchu więc tym prędkość wycinkowa na płaszczyźnie xz jest stała. Znaczy się to, jeśli na płaszczyźnie xz utworzymy rzut ruchu punktu wahadła stożkowego, to rzut nitki zakreślać będzie w równych czasach równe pola.

Pomnóżmy teraz równania systemu odpowiednio przez $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ i dodajmy je do siebie.

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt} = \mu\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) - g\frac{dy}{dt}$$

Ponieważ punkt ma zostawać na powierzchni kuli, stąd wyrażenie w nawiasach po prawej stronie musi być równe zeru i wyrażenie się uprości. Całkując je dostaniemy:

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = +gy + \text{Const}$$

Widzimy, że jest to stwierdzenie zachowania energii:

$$\frac{1}{2}mV^2 - mgy = \text{Const.}^{*)}$$

co można było zresztą z góry przewidzieć. Mamy więc 2 równania:

*) Znak – pochodzi stąd, że liczymy dodatnią oś y w dół.

(a) i (b), z których już wyrugowany jest czynnik nieznany μ, oraz trzecie równanie kuli. Dla łatwiejszego opisu ruchu moglibyśmy wprowadzić układ biegunowy przestrzenny. Wprowadzamy więc dwa kąty φ, odpowiadający długości geograficznej, i θ, będący dopełnieniem szerokości geograficznej. Pomiędzy dawnemi trzema spółrzędnemi x, y, z a wprowadzonemi zachodzić będą następujące relacye:

$$x = a \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = a \cos\theta$$

$$z = a \sin\theta \sin\varphi$$

gdzie φ i θ są zmiennemi. Zmniejszyła się więc ilość zmiennych z trzech na dwie. Pochodzi to stąd, że trzecia spółrzędna układu biegunowego: promień jest tu w myśl warunków zadania wielkością stałą $= a$. Dostaniemy zatem dwa równania różniczkowe, w których θ i φ będziemy uważać jako funkcye t. Można to osiągnąć przez substytucyę powyższą lub bezpośrednio ze znaczenia spółrzędnych nowych. Opuścimy to jednak, bo dostalibyśmy znowu funkcye eliptyczne. Weźmiemy tu tylko pod uwagę wypadek specyalny. Założymy mianowicie, że $y = y_0 = const$ tj. punkt, obciążający nitkę będzie pozostawał na

przecięcia się płaszczyzny równoległej do płaszczyzny (xy) i powierzchni kuli czyli na pewnem kole. Czy to jest możliwe? Wartość y wchodzi tylko w drugie równanie naszego systemu równań. Jeśli y ma spełniać powyższe warunki, to musi

$$+g+\mu y_0=0$$

skąd $\mu=-\frac{g}{y_0}$ i system nasz zredukuje się do dwu równań:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{y_0}x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{g}{y_0}z$$

od siebie niezależnych. Jeśli więc y_0 będzie spełniało powyższą relację, to specyalny ów ruch będzie się mógł odbywać. $\frac{g}{y_0}=\alpha$ jest wielkością stałą. Mamy więc znany nam już typ równań różniczkowych:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\alpha x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\alpha z$$

Rozwiązania ich są:

$$x=A\sin(t\sqrt{\alpha}+\varepsilon)$$

$$z=B\sin(t\sqrt{\alpha}+\varepsilon'),$$

przyczem wobec tego, że ruch odbywa się po kole: $A=B$, bo wychylenia około osi y są równe. ε i ε' określają początkowe położenia punktu materyalnego wahadła. Okres wahania zależy

od $\alpha = \frac{a}{y_0}$. Jest mianowicie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}}$$

Wzór więc taki sam jak przy wahadle matematycznem, tylko na miejsce długości wahadła a przychodzi rzut nitki na oś y ów: y_0. Wzór ten przewidzieć można rozumowaniem fizycznem. Ruch punktu materyalnego wahadła stożkowego odbywa się

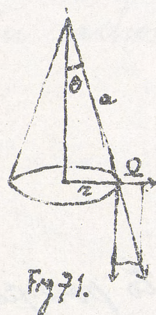


Fig 71.

pod współdziałaniem dwu sił: ciężkości i odśrodkowej. Nitka przybiera kierunek wypadkowej. Jeśli siłę odśrodkową nazwiemy Ω, to

$$\Omega = \frac{mv^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2a\pi\sin\theta}{T}\right)^2}{a\sin\theta} = \frac{4\pi^2 m a\sin\theta}{T^2}$$

$$\frac{\Omega}{mg} = \frac{4\pi^2 a\sin\theta}{gT^2} = tg\,\theta \quad ; \text{ stąd}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{a}{g}\cos\theta$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}\cos\theta}$$

Również można bez odwoływania się do metody Lagrange'a dojść sposobem fizycznym do równań ruchu. Powiadamy mianowicie:

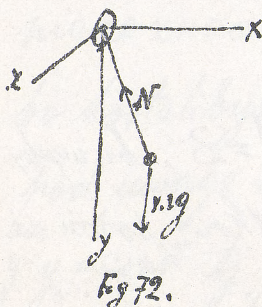


Fig 72.

Na punkt materyalny wahadła działa nietylko siła ciężkości, lecz też napięcie nitki N. Gdy te obie siły wprowadzimy, to punkt można uważać za swobodny i stosować równania Newtona. Napięcie nitki N rozkładamy w kierunkach osi x, y, z.

Mamy zatem:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = N\frac{x}{a}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg + N\frac{y}{a}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = N\frac{z}{a}$$

Gdy te równania porównamy ze systemem równań na str. 106, widzimy, że $N = 2\lambda$. Mamy tak określone fizyczne znaczenie czynnika Lagrange'owskiego λ: ma on związek z napięciem nitki. Napięcie owo nie jest z góry znane, bo zależy ono od ruchu, jaki będzie. Rugujemy przeto λ. Można dalej równania tak otrzymane całkować. Jużeśmy wyżej wspomnieli, że dostalibyśmy tu funkcye eliptyczne. Wrazie, gdybyśmy chcieli rachunek uprościć, ograniczylibyśmy się do wychyleń bardzo małych i tak dostalibyśmy wyrażenia, w których całkowania dadzą się przeprowadzić bez trudności. W te rzeczy jednak wchodzić nie będziemy i na tem zakończymy ruch punktu nieswobodnego i wogóle dynamikę punktu, a przystąpimy do systemu punktów.

System punktów.

System punktów tworzą punkty, które ulegają części-

wo siłom zewnętrznym, częściowo wewnętrznym. Tem jest także ten wypadek objęty, gdzie pewne punkty spełniają warunki ruchu przez to, że zostają na pewnych powierzchniach lub krzywych, gdyż takie powierzchnie można zastąpić z dowolnem przybliżeniem przez ciało sztywne, złożone z punktów materyalnych w niezmiennych odległościach (wskutek wewnętrznych sił międzydrobinowych). Definicyja ta jest zatem bardzo ogólna i obejmuje także każdą maszynę. Można ją stosownie do potrzeby ograniczyć. Zakładając np. że odległości wszystkich punktów systemu między sobą mają pozostawać niezmienione wskutek odpowiednich sił wewnętrznych dostajemy określenie ciała sztywnego, a zatem też maszyny prostej (pręt sztywny, klin). My w tym rozdziale zajmować się będziemy systemem punktów w sensie ogólnym, gdzie siły pochodzą po części z zewnątrz, po części są to siły działające wewnątrz między punktami, a z tych część może pochodzić od owych „przymusowych" warunków ruchu.

Każdy punkt materyalny systemu można uważać za swobodny, gdy uwzględnimy wszystkie siły nań działające. Możemy tedy do każdego stosować równania Newtona. Gdy oznaczymy przez X, Y, Z siły zewnętrzne i wewnętrzne bez sił „przymusowych", przez ξ, η, ζ siły wewnętrzne przymusowe tj. działające między punktami o niezmiennej odległości, dostaniemy dla każdego z punktów systemu równania następujące:

$$m_i \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k + \xi_k \qquad \delta x_k$$

$$m_i \frac{d^2 y_k}{dt^2} = Y_k + \eta_k \qquad \delta y_k$$

$$m_i \frac{d^2 z_k}{dt^2} = Z_k + \zeta_k \qquad \delta z_k$$

$(\kappa = 1, 2 \ldots n)$ Gdy te równania pomnożymy odpowiednio przez $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ dodamy i uporządkujemy według $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ będzie:

$$\sum_k \left[\left(X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}\right)\delta x_k + \left(Y_k - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}\right)\delta y_k + \left(Z_k - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}\right)\delta z_k \right] =$$

$$= -\sum_k \left(\xi_k \delta x_k + \eta_k \delta y_k + \zeta_k \delta z_k \right).$$

Prawa strona tego równania przedstawia pracę wykonaną przez siły wewnętrzne „przymusowe". Te siły działają tak, że odległości pewnych punktów zostają niezmienione. Weźmy pod uwagę dwa takie punkty np: 1 i 2. Według zasady dynamiki [str 45. 1)] siły tych punktów działają w kierunku łącznicy. Praca wykonana przy przesunięciu tych punktów przez te siły będzie:

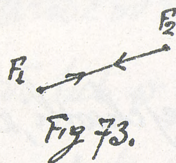


Fig 73.

$$\xi_1 \delta x_1 + \eta_1 \delta y_1 + \zeta_1 \delta z_1 + \xi_2 \delta x_2 + \eta_2 \delta y_2 + \zeta_2 \delta z_2$$

przyczem:

$$\xi_1 = F_1 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} \qquad \xi_2 = -F_1 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}$$

$$\eta_1 = F_1 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} \qquad \eta_2 = -F_1 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}$$

$$\zeta_1 = F_1 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}} \qquad \zeta_2 = -F_1 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}},$$

gdzie r_{12} oznacza odległość punktów 1 i 2. Wstawiając te znaczenia w wyrażenie pracę, otrzymujemy jej wartość:

$$\frac{F_1}{r_{12}} \left\{ (x_2 - x_1)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_2 - y_1)(\delta y_1 - \delta y_2) + (z_2 - z_1)(\delta z_1 - \delta z_2) \right\}.$$

Lecz wobec założenia: $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{Const}$

$$d(r_{12}^2) = 2(x_2 - x_1)(\delta x_1 - \delta x_2) + 2(y_2 - y_1)(\delta y_1 - \delta y_2) + 2(z_2 - z_1)(\delta z_1 - \delta z_2) = 0$$

Zatem też praca owa jest równa zeru. Że zaś to się stosuje do każdej pary punktów systemu, zatem cała prawa strona powyższej równości przedstawiająca pracę wykonaną przez siły przymusowe jest równa zeru. Równanie się zatem upraszcza do:

$$\sum_k \left[\left(X_k - m_k \frac{d^2x_k}{dt^2}\right)\delta x_k + \left(Y_k - m_k \frac{d^2y_k}{dt^2}\right)\delta y_k + \left(Z_k - m_k \frac{d^2z_k}{dt^2}\right)\delta z_k\right] = 0$$

Jest ono zatem ważne pod założeniem, że δx_k, δy_k, δz_k są składowe przesunięcia przygotowanego tj. zgodnego z warunkiem przymusowym. X_k, Y_k, Z_k są to siły całkowite z wyłączeniem owych sił przymusowych. Sił reprezentujących nam warunki przymusowe a więc ξ_k, η_k, ζ_k w tem równaniu niema, bo wpływ ich jest identycznie zero.

Z tego równania ruchu dostajemy w jednej chwili, zakładając: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$: warunek równowagi:

$$\sum_k (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0$$

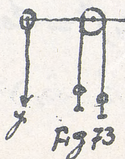
tj. praca przygotowana jest równa zeru (Stosowalność np. klin, blok, śruba). W rachunku wektorowym zapiszemy wyrażenie pierwsze w formie:

$$\sum_k \left(\mathfrak{f}_k - m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2}\right)\delta r_k = 0$$

drugie

$$\sum_k \mathfrak{f}_k \, \delta r_k = 0 .$$

Zastosowanie: Ruch po spadkownicy Atwooda: Ruch nastąpi przez nałożenie na szalki różnych mas m_1 i m_2. Masy koła i sznurka pomijamy: Siły działające są: $Y_1 = m_1 g$, $Y_2 = m_2 g$, $X_1 = X_2 = Z_1 = Z_2 = 0$.



Stąd:

$$\left(Y_1 - m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\delta y_1 + \left(Y_2 - m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right)\delta y_2 = 0$$

gdzie δy_1, δy_2 są przesunięciami przygotowanemi. Zakładamy, że sznurek nierozciągliwy: $y_1 + y_2 = Const$; stąd: $\delta y_1 = -\delta y_2$ oraz $\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{d^2y_2}{dt^2}$. Stąd:

$$m_1\left(g - \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) - m_2\left(g + \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) = 0$$

Zatem dostajemy następujące równanie różniczkowe ruchu:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

Zależnie od wielkości m_1 i m_2 przyspieszenie będzie skierowane w dół lub w górę. Widzimy, że ruch będzie jednostajnie przyspieszony, ale inny niż gdyby każde z ciał m_1 i m_2 niezależnie się poruszało.

2. Ruch wahadła złożonego. Pręt obciążony masami m_1 i m_2 idealizujemy matematycznie przez założenie, że masę pręta można pominąć. Siły działające będą: $X_1 = Z_1 = 0$, $X_2 = Z_2 = 0$

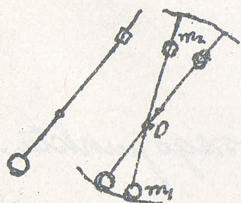


Fig 77.

$$Y_1 = m_1 g \quad Y_2 = m_2 g$$

Ruch masy m_1 odbywa się po kole o promieniu a_1, masy m_2 po kole o promieniu a_2 około O. Pręt sztywny. Jeśli pręt zmieni położenie, przesunięcia podobne tylko w przeciwnych kierun=

kach. stąd:

$$\delta x_1 : \delta x_2 = -a_1 : a_2$$

$$\delta y_1 : \delta y_2 = -a_1 : a_2$$

$$\delta x_2 = -\delta x_1 \frac{a_2}{a_1}$$

$$\delta y_2 = -\delta y_1 \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{d^2 x_1}{dt^2}\frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{d^2 y_1}{dt^2}\frac{a_2}{a_1}$$

Uwzględniając, że m_1 porusza się po obwodzie koła, mamy:

$$x_1^2 + y_1^2 = a_1^2.$$

Powołując się na wyrażenie nasze ogólne mamy:

$$\left(0 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\right)\delta x_1 - \left(0 + m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\frac{a_2}{a_1}\right)\delta x_1 \frac{a_2}{a_1} +$$

$$\left(m_1 g - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right)\delta y_1 - \left(m_2 g + m_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\frac{a_2}{a_1}\right)\delta y_1 \frac{a_2}{a_1} = 0$$ czyli równanie

różniczkowe ruchu będzie:

$$-\delta x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\left\{1 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \delta y_1 \left\{ g\left(1 - \frac{a_2 m_2}{a_1 m_1}\right) - \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{d^2 y_1}{dt^2}\right\} = 0\right.$$

Tu określony jest ruch przez zmienne x_1, y_1 pierwszego punktu. Trzebaby tu jeszcze uwzględnić równanie koła, po którem się ruch odbywa, albo wprowadzić współrzędne biegunowe, coby było najwygodniej. Rezultat końcowy dostać jednak można o wiele prościej powołując się na zasadę zachowania energii. Dlatego

rachunku nie kończymy tutaj, bo wrócimy do tego zadania później. Tu mieliśmy tylko na celu okazać metodę.

Dla systemu punktów mamy trzy ogólne zasady: zachowania energii, ruchu środka masy, momentów wycinkowych. Do ich wyprowadzenia przystępujemy:

Zasada zachowania energii mechanicznej. Znacząc przez X_i, Y_i, Z_i składowe sił zewnętrznych i wewnętrznych działających między punktami (grawitacya, nitka), mamy:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 \qquad dx_1$$
$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = X_2 \qquad dx_2$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$
$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 \qquad dy_1$$
$$m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = Y_2 \qquad dy_2$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$
$$m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 \qquad dz_1$$
$$m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} = Z_2 \qquad dz_2$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez dx_i, dy_i, dz_i $(i=1,2,\ldots n)$, dodając je i porządkując, dostajemy:

$$m_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}dx_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}dy_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}dz_1\right) + m_2(\cdots\cdots) + \cdots\cdots =$$

$$= (X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1) + (X_2 dx_2 + \cdots) + \cdots\cdots.$$

Teraz możemy całkować. Po lewej stronie dostajemy energię kinetyczną, po prawej pracę. Całkując w granicach od pozycji początkowej p do końcowej k, i zauważywszy, że:

$$\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] = m_i \frac{V_i^2}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n).$$

napiszemy:

$$\left. m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2} + \cdots\cdots \right]_p^k = \int_p^k \left\{ [X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1] + [X_2 dx_2 + \cdots] + \cdots \right\}.$$

$X_i dx_i$, $Y_i dy_i$, $Z_i dz_i$ to pracy elementarne. Z nich $\int_p^k$ to praca całkowita. Krótko więc rezultat ostatni pisząc, mamy:

$$L_k - L_p = P_p^k.$$

W przyrodzie zdarza się, że siły działające są potencyalne, tzn. że każda ze sił składowych da się wyrazić jako ujemna pochodna cząstkowa pewnej funkcyi argumentów pozycyi:

$$X_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad X_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots$$

$$Y_1 = -\frac{\partial U}{\partial y_1}, \quad Y_2 = -\frac{\partial U}{\partial y_2}, \ldots$$

$$Z_1 = -\frac{\partial U}{\partial z_1}, \quad Z_2 = -\frac{\partial U}{\partial z_2}, \ldots$$

gdzie $\quad U = fc(x_1, x_2, \ldots y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots).$

Jeśli tak się rzecz ma, to prawa strona powyższej równości

napisze się:

$$P_p^\kappa = -\int_p^\kappa \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} dz_1 \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \right] \right\}$$

gdzie nawias { } przedstawia całkowitą różniczkę funkcyi U. Zatem

$$L_\kappa - L_p = -U_\kappa + U_p \quad \text{czyli}$$

$$L_\kappa + U_\kappa = L_p + U_p = \text{Const.}$$

tj. suma energii kinetycznej i potencyalnej dla systemu punktów w każdej pozycyi jest stałą. Jeśli siły nie są potencyalne tj. niema funkcyi U o wspomnianych własnościach, zasada ta nie jest ważna. Warunki konieczne aby dany system sił przedstawiał siły potencyalne, jest jak to z definicyi tychże wynika, by zachodziło $\frac{3n(3n-1)}{2}$ równości kształtu:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_\kappa} = \frac{\partial X_\kappa}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial y_\kappa} = \frac{\partial Y_\kappa}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial z_\kappa} = \frac{\partial Z_\kappa}{\partial z_i} \qquad i \neq \kappa$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_\kappa} = \frac{\partial Y_\kappa}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial X_i}{\partial z_\kappa} = \frac{\partial Z_\kappa}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial z_\kappa} = \frac{\partial Z_\kappa}{\partial y_i} \qquad i \gtreqless \kappa$$

Siły potencyalne nazywamy z powodu zachodzenia dla nich zasady zachowania energii mechanicznej zachowawczemi.

Przykład: $U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{12}}$

gdzie r_{12}, r_{13}, r_{23} oznaczają odstępy mas: $r_{12} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} - \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} \cdot \frac{x_1 - x_3}{r_{13}} = X_1$$

Analogiczne wzory będą na $X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots$, gdzie $\frac{x_1-x_2}{r_{12}} = \cos\alpha_{12}$, $\frac{x_1-x_3}{r_{13}} = \cos\alpha_{13}, \ldots$ Będą to zatem siły w rodzaju grawitacyjnej; w liczniku bowiem jest iloczyn mas, w mianowniku kwadrat odległości.

<u>Ruch środka masy.</u> Środkiem masy nazywamy punkt, określony przez współrzędne:

$$\xi = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$

$$\eta = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$$

$$\zeta = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}$$

W symbolice wektorowej możemy tę definicję napisać tak:

$$\circledR = i\xi + j\eta + k\zeta$$

lub wstawiając wartości:

$$\circledR = \frac{\sum m_k (i x_k + j y_k + k z_k)}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k r_k}{\sum m_k}$$

Gdy uwzględnimy wszystkie siły działające na którykolwiek punkt systemu, możemy dlań stosować równanie

ruchu swobodnego:

$$m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = f_k$$

Równań tych będzie tyle, ile punktów systemu. Sumując je mamy:

$$\sum m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \sum f_k$$

Wobec tego, że masy z czasem są niezmienne (rezultat to eksperymentalny), możemy równość powyższą napisać też:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum m_k r_k = \sum f_k$$

czyli według definicji środka masy:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\circledR \sum m_k \right] = \sum f_k .$$

Lub znacząc dla krótkości: $\sum m_k = M$; $\sum f_k = \Phi$, mamy pożądaną równość:

$$M \frac{d^2 \circledR}{dt^2} = \Phi ,$$

orzekającą, że przyspieszenie środka masy jest takie, jakby tam wszystkie masy były skoncentrowane, i jakby na ń działała suma wszystkich sił.

Widać tu bezpośrednio, że siły wewnętrzne nie wpływają wcale na ruch środka masy, bo tworzą one działanie i oddziaływanie. Znoszą się tedy wzajemnie. O ile zatem na system działają tylko siły wewnętrzne, to przyspiesze-

nie środka masy = 0. Zatem środek masy pod działaniem li tylko sił wewnętrznych porusza się z prędkością jednostajną. Jest to ważne w przybliżeniu dla naszego systemu planetarnego. Na tem polega cofanie się armaty w czasie strzału, funkcyonowanie Brauninga, mitralezy Maxima, wiosłowanie itd. Na pozór ruch łodzi polega na popychaniu, w istocie na zasadzie środka masy. Wiosłując nadajemy wodzie pewnej prędkości, łódź otrzymuje ją w kierunku przeciwnym. O ważności środka masy przekonać się można przy wyskakiwaniu z łodzi. Bardzo wiele zjawisk na tem polega. Podskoczenie np. w górę związane jest z odepchnięciem ziemi na dół.

Zasada zachowania pól lub ściślej zasada zachowania momentów wycinkowych. Z temsamem co przy każdem z obu poprzednich zasad założeniem możemy napisać:

$$m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \mathfrak{F}_k$$

Przypominając sobie własności iloczynu wektorowego, możemy napisać:

$$m_k \left[r_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} \right] = \left[r_k \mathfrak{F}_k \right]$$

Lewą stronę tej równości możemy inaczej napisać. Za-

uważymy mianowicie, że

$$\frac{d}{dt}\left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right] = \underbrace{\left[\frac{dr_k}{dt}\frac{dr_k}{dt}\right]}_{0} + \left[r_k \frac{d^2 r_k}{dt^2}\right].$$

stąd powyższa równość napisze się:

$$m_k \frac{d}{dt}\left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right] = [r_k f_k]$$

Rozciągając tę równość ważną dla każdego punktu, na system cały razem, dostajemy wyrażenie pożądane:

$$\frac{d}{dt}\sum_k m_k \left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right] = \sum_k [r_k f_k] = \mathfrak{M}$$

Rozważmy jego znaczenie fizyczne. Jest to przedewszystkiem wektor, więc wielkość kierunkowa. W sumie środkowej jest $[r_k f_k]$. Wartość bezwględna tego iloczynu jest $r_k F_k \sin(\widehat{r_k F_k})$.

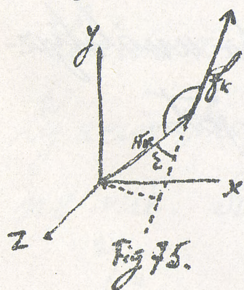


Fig. 75.

$$\sin(\widehat{r_k F_k}) = \sin \varepsilon$$

$F_k . r_k \sin \varepsilon$ jest to iloczyn z siły i jej ramienia. Jest to zatem moment siły. Kierunek tego momentu jest prostopadły do płaszczyzny r_k, f_k ze strzałką skierowaną według umów

str 14. $\sum [r_k f_k]$ jest momentem wypadkowym i znaczymy dlatego $\mathfrak{M}$. W sumie lewej $\frac{dr_k}{dt}$ oznacza prędkość. Zatem $\left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right] = [r_k v_k]$. Bezwzględna wartość

tego iloczynu przedstawia pole podwójne trójkąta którego

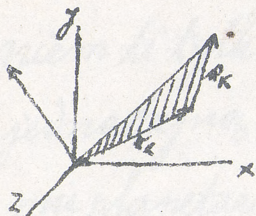


Fig 76.

bokami są r_k i ϑ_k. Zatem $\left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right]$ oznacza prędkość wycinkową w sensie wektorowym. Już przedtem przychodziła nam prędkość wycinkowa, ale chodziło nam tam tylko o wielkość pola, tu uwzględniamy jeszcze kierunek według umów. $m_k\left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right]$ nazywamy momentem wycinkowym. $\sum m_k\left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right]$ to wypadkowy moment wycinkowy. Po tych rozważaniach znaczenie powyższego wyrażenia wypowiemy tak: Pochodna czasowa wypadkowego momentu wycinkowego jest równa wypadkowemu momentowi sił.

Z wyrażeń wektorowych możemy przejść do analitycznych przez proste rozpisanie. Według str 17. jest:

$$\left[r_k \frac{dr_k}{dt}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_k & y_k & z_k \\ \frac{dx_k}{dt} & \frac{dy_k}{dt} & \frac{dz_k}{dt} \end{vmatrix}, \qquad \left[r_k f_k\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_k & y_k & z_k \\ X_k & Y_k & Z_k \end{vmatrix}$$

Stąd wyrażenie wypowiedzianej dopiero co zasady rozpadnie się na trzy wyrażenia:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\left(y_k \frac{dz_k}{dt} - z_k \frac{dy_k}{dt}\right) = \sum(y_k Z_k - z_k Y_k)$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\left(z_k \frac{dx_k}{dt} - x_k \frac{dz_k}{dt}\right) = \sum(z_k X_k - x_k Z_k)$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)=\sum(x_kY_k-y_kX_k)$$

Do wzorów tych dochodzi się bezpośrednio wychodząc pod znanemi założeniami z równań:

$$m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}=X_k$$

$$m_k\frac{d^2y_k}{dt^2}=Y_k \qquad \cdot -z_k$$

$$m_k\frac{d^2z_k}{dt^2}=Z_k \qquad \cdot\ y_k$$

Mnożąc np. odpowiednio przez $-z_k$, y_k drugie i trzecie równanie systemu, i sumując dostajemy:

$$\sum m_k\left(\frac{d^2z_k}{dt^2}y_k-\frac{d^2y_k}{dt^2}z_k\right)=\sum(Z_ky_k-Y_kz_k)$$

identyczne z pierwszem z poprzednich wyrażeń. Analogonie dostaniemy następne.

Łatwo z wyrażenia wektorowego dowieść że jedynie siły zewnętrzne wpływają na moment wycinkowy, wewnętrzne nie. Siły punktów 1 i 2 działają w kierunku łącznicy:

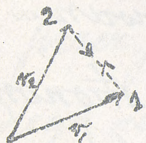


Fig. 77.

$$f_1=-f_2$$

Uważajmy sumę ich momentów:

$$[r_1 f_1]+[r_2 f_2]$$

$r_2=r_1+x f_1$ jak to wynika z trójkąta. Stąd:

$$[r_1 f_1]+[r_2 f_2]=[r_1 f_1]-[r_1 f_1]-x[f_1 f_1]=0 \quad \text{c. b. d. o.}$$

Stąd

wypadkowy moment zostaje niezmieniony pod względem wielkości i kierunku, jeśli tylko działają siły wewnętrzne. Przykład na to daje następujące doświadczenie. Na sznurku

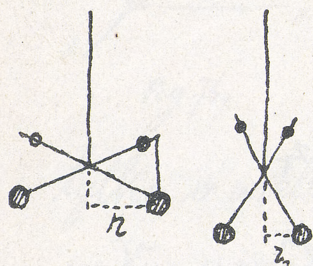


Fig 78.

kręcą się pręcikі obciążone masami. Pręciki te na końcach złączone są innym sznurkiem, który w czasie ruchu przecinamy lub przepalamy. Skutkiem tego pręciki się składają, ale za to szybciej wirują. Owo szybsze wirowanie tłumaczy się tem, że w systemie o siłach tylko wewnętrznych moment wycinkowy ma zostać niezmienny. Moment wycinkowy, gdy jeszcze pręciki są rozłożone jest: $r^2\frac{d\varphi}{dt}\cdot m$, gdy złożone $r_1^2\frac{d\varphi_1}{dt}m$. Wobec równości tych dwu wielkości a nierówności promieni $r^2 > r_1^2$, musi zachodzić nierówność prędkości kątowej: $\frac{d\varphi}{dt} < \frac{d\varphi_1}{dt}$. Prędkość wzrośnie w stosunku kwadratowym. Stałością momentu wycinkowego tłumaczymy też niezmienną szybkość obrotu ziemi. O zachowaniu niezmiennej szybkości obrotu świadczą rachunki astronomiczne, według których zgadzają się np. zaćmienia słońca z czasami bardzo odległemi. O ile atoli zachodziłyby jakieś dywergencje, to jeszcze trudno orzec czy powoduje je zmiana długości dnia czy też zmiana prędkości ruchu ziemi koło

Słońca czy też jedno i drugie razem. Niezmienność długości dnia jest jeszcze kwestyą otwartą, bo niektórzy twierdzą, iż długość dnia uległa zmianie. Jest teorya, że ziemia kurczy się. Stąd więc na zasadzie zachowania momentów wycinkowych, powinna się szybciej obracać. Z drugiej jednak strony hamuje ten obrót księżyc wskutek przypływu i odpływu morza. Nie wiadomo jednak w jakim stosunku te oba wpływy pozostają do siebie.

Wyłożone uprzednio trzy ogólne twierdzenia: o zachowaniu energii mechanicznej, zachowaniu ruchu środka masy i o zachowaniu momentów wycinkowych ułatwiają nam rozwiązywania zagadnień. Gdy jest dana np. jedna tylko swoboda ruchu, to wystarczy do rozwiązania zagadnienia zasada zachowania energii.

Jako przykład rozważymy ruch planet przyciąganych nie przez jakiś punkt niezmienny lecz słońce, które samo podlega ruchowi. Siły środkowe nie wpływają, jak wiemy, na ruch środka masy tak, że on zostaje w spoczynku lub porusza się z prędkością jednostajną. Jeśli się środek masy porusza to możemy przyjść, że układ odniesienia porusza się

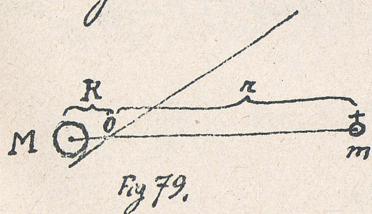


Fig 79.

w tym samym kierunku z jednakową prędkością, tak iż uwzględniając te dwa ruchy, będziemy mogli uważać środek masy za nieruchomy ze względu na ów układ odniesienia. Oprócz tego ruch [illegible] pomijamy. Weźmy też pod uwagę w szczególności tylko słońce o masie M, a oddaleniu od środka masy R i ziemię o masie m, a oddaleniu od środka masy r. Z definicji środka masy wynika, że:

$$R : r = m : M$$

Jeżeli te położenia punktów M i m znajdują się na prostej, oś tę prostą możemy obrać, powołując się na analityczną definicję środka masy, za oś np. x-ów. Przeto też współrzędne $y = z = 0$ stale. Stąd: $\xi = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m}$ $\eta = \zeta = 0$ Zatem środek masy musi zostawać na łącznicy obu punktów. Kładąc więc $\xi = 0$, $x_1 = -R$, $x_2 = r$, mamy powyższą proporcję. Tak wykorzystaliśmy zasadę o zachowaniu ruchu środka masy. Teraz zwróćmy się do zasady trzeciej o zachowaniu momentów wycinkowych:

Moment wycinkowy ziemi jest $m r^2 \frac{d\varphi}{dt}$, słońca $M R^2 \frac{d\varphi}{dt}$; jest zatem:

$$m r^2 \frac{d\varphi}{dt} + M R^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{Const} = C$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt}\left[m + \frac{MR^2}{r^2}\right] = C$$

Wobec: $R^2 : r^2 = m^2 : M^2$ jest $r^2 \frac{d\varphi}{dt}\left[m + \frac{Mm^2}{M^2}\right] = C$

czyli $$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{CM}{m(m+M)} = \alpha \text{ (stałe)}$$

tj. prędkość wycinkowa ziemi jest wielkością stałą. Powtarzając tosamo dla R doszlibyśmy do wniosku, że również prędkość wycinkowa słońca jest stałą.

Zwróćmy się jeszcze do twierdzenia pierwszego o zachowaniu energii mechanicznej. Energia kinetyczna ziemi jest $\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$, słońca $\frac{M}{2}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$. Siła przyciągania według Newtona: $-\frac{\kappa mM}{(r+R)^2}$. Potencjał zatem $U = -\frac{\kappa mM}{r+R}$

Zatem zasada zachowania energii napisze się:

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] + \frac{M}{2}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \frac{\kappa mM}{r+R} = Const$$

czyli

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left[1+\frac{m}{M}\right] + \frac{m}{2} r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[1+\frac{m}{M}\right] - \frac{mM\kappa}{r(1+\frac{m}{M})} = Const$$

stąd:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2M\kappa}{r\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} = Const$$

Wprowadzając skrócenia na wielkości stałe:

$$\frac{2M\kappa}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} = \beta \qquad Const = \frac{E+U}{\frac{m}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \gamma$$

i przypominając sobie, że $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \alpha$, skutkiem czego: $\frac{dr}{dt} = \left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right) = \left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{\alpha}{r^2}\right)$, możemy napisać:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{\beta}{r} = \gamma. \quad \text{Stąd zaś}$$

$$\int \frac{\alpha\, dr}{r^2\sqrt{\gamma + \frac{\beta}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = \int d\varphi \qquad \text{czyli}$$

$$\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^4} - \left(\frac{\beta}{2\alpha^2} - \frac{1}{r}\right)^2}} = \int d\varphi$$

Wprowadzając skrócenia $\frac{\gamma}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^4} = A^2$, $\frac{\beta}{2\alpha^2} - \frac{1}{r} = z$, mamy $\frac{dr}{r^2} = dz$ oraz całka po lewej stronie przybiera kształt:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A^2 - z^2}} = \varphi + Const$$

$$\int \frac{d\left(\frac{z}{A}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{A}\right)^2}} = -\arccos\frac{z}{A} = \varphi + Const$$

$$\frac{z}{A} = \cos(-\varphi + Const)$$

Kładąc $Const = 0$, co przez dobór położenia osi można zawsze uskutecznić, mamy w dalszym ciągu:

$$z = A\cos\varphi = \frac{\beta}{2\alpha^2} - \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{1}{\frac{\beta}{2\alpha^2} - A\cos\varphi} \qquad \text{czyli}$$

$$r = \frac{\frac{2\alpha^2}{\beta}}{1 - \frac{2A\alpha^2}{\beta}\cos\varphi}$$

Kładąc $\frac{2\alpha^2}{\beta} = p$, $-\frac{2A\alpha^2}{\beta} = \varepsilon$ mamy równanie przecięcia stożkowego:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

Wiemy, że zależnie od tego, czy $\varepsilon \lesseqgtr 1$, równanie to

przedstawia elipsę, parabolę lub hiperbolę. Zależnie więc od owego ε ruch planety odbywać się będzie po jednej z tych krzywych. Lecz

$$\varepsilon = -\frac{2A\alpha^2}{\beta} = \mp \frac{2\alpha^2}{\beta}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^2}+\frac{\beta^2}{4\alpha^4}}$$. Biorąc

znak + mamy: $$\varepsilon = \frac{2\alpha}{\beta}\sqrt{\gamma+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} = \sqrt{\frac{4\alpha^2\gamma}{\beta^2}+1}$$

$$\varepsilon \lesseqgtr 1 \quad , \text{ gdy } \quad \gamma \lesseqgtr 0$$

Lecz $\gamma = \dfrac{E+U}{\frac{m}{2}(1+\frac{m}{M})}$. Zależnie więc, przy danych masach, od wielkości energii ruch będzie się odbywał po elipsie, paraboli lub hiperboli. Zauważymy, że nie wchodzi tutaj w grę kierunek, w jakim się ruch odbywa. Zależy on tylko od energii kinet. w pierwszej chwili; dalszy ruch zależy już od owego stosunku energii i mas. W szczególności dla ziemi z obserwacyi wiemy, że porusza się po elipsie.

Wyciągniemy jeszcze wnioski odnośnie do trzeciego prawa Keplera. Zapytamy się, ile wynosi $\frac{T^2}{a^3}$? Jeśli droga odbywa się po elipsie, której powierzchnia jest $ab\pi$, a prędkość wycinkowa wynosi $\frac{\alpha}{2}$, to czas obiegu $T = \frac{ab\pi}{\frac{\alpha}{2}} =$ $= \frac{2ab\pi}{\alpha}$. Zatem:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4a^2b^2\pi^2}{\alpha^2 a^3} = \frac{4\pi^2}{\alpha^2}\cdot\frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2}{\alpha^2}p =$$

$$= \frac{4\pi^2}{\alpha^2}\cdot\frac{2\alpha^2}{\beta} = \frac{8\pi^2}{2M\kappa}\left(1+\frac{m}{M}\right)^{..} = \frac{4\pi^2}{M\kappa}\left(1+\frac{m}{M}\right)^2 = \lambda.$$ Gdy weźmi-

my brać pod uwagę różne planety, o różnych masach m, to λ będzie stałe t.j. prawo Keplera będzie ściśle ważne o tyle, o ile stosunek $\frac{m}{M}$ jest wielkością znikomo małą. Dla wielkich planet naszego systemu: Jowisza ($\frac{1}{1000}$ masy Słońca), Saturna, Neptuna są oczywiście znaczne odstępstwa. Gdybyśmy jednak wyobrazili sobie system planetarny taki, iż masy m wszystkich planet są równe, albo też znikomo małe w porównaniu do masy Słońca, to dla takiego systemu trzecie prawo Keplera byłoby ściśle ważne.

Ciała sztywne.

Rozważania kinetyczne. Rozpatrzymy naprzód ruch ciała sztywnego pod względem czysto geometrycznym. Pozycya bryły jest określona przez pozycyę trzech jej punktów, bo każdy inny punkt jej ma już z powodu stałych odległości położenie określone względem tych trzech.



Fig 80.

Ciało sztywne można z pozycyi I przeprowadzić do dowolnej pozycyi II zawsze zapomocą dwu procesów: 1° wykonywujemy przesunięcie posuwiste (trans-

latoryczne) tak by np. punkt A przeszedł w położenie A'.
2° Skręcamy to ciało tak, by punkt B przeszedł w B', zaś C w C'. Jeśli zmiany te są skończone, to wzory na... się zawiłe. Jeśli jednak przesunięcia są nieskończenie małe, sprawa upraszcza się. Ograniczymy się zatem do rozpatrywania tych ostatnich.

Gdy ciało wykona przesunięcie posuwiste, nieskończenie

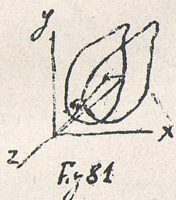


Fig 81

małe, to wszystkie jego punkty doznają przesunięć równoległych i równo-wielkich. Jeśli więc pozycja punktu poszczególnego określona jest wektorem r_k, to zmiana tego wektoru przy tem przesunięciu oznaczy się dr_k. Że zaś zmiany wszystkich punktów są jednakowe, zatem:

$$dr_k = dr_0 \quad \text{(przesunięcie wspólne).}$$

i dr_0 można uważać jako przesunięcie początku układu.

Gdy ciało wykona nieskończenie mały obrót około jakiejś osi przechodzącej np. przez początek układu, to każdy punkt P_k poruszy się po

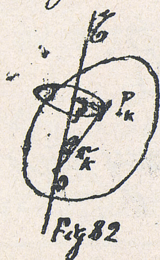


Fig 82

łuczku odpowiadającym kątowi nieskończenie małemu φ prostopadle do

osi obrotu i promienia r_k. Wielkość bezwzględna tego przesunięcia jest: $r_k \sin\theta . \varphi$. Przedstawia to bezwzględną wielkość iloczynu wektorowego:

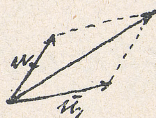
$$[d\zeta_0 . r_k]$$

jeśli przez ζ naznaczymy kierunek osi, a $d\zeta_0$ wielkość obrotu, którą sobie na tej osi odcinamy. Również kierunek ruchu punktu zgadza się z kierunkiem iloczynu $[d\zeta_0 \, r_k]$. Zatem iloczyn ów wektorowy przedstawia powyższe przesunięcie punktu P_k przy obrocie ciała. Jest on dla różnych punktów różny.

Ogólne przesunięcie nieskończenie małe uważanego punktu będzie sumą geometryczną owych składowych: Naznaczymy je:

$$\text{(a)} \qquad \delta r_k = dr_0 + [d\zeta_0 \, r_k].$$

Z takiego przedstawienia rzeczy można wyciągnąć cały szereg wniosków. Widzimy np. że szereg obrotów nieskończenie małych da się przedstawić sumą. Wykreślmy sobie wektory odpowiednich obrotów. Można je geometrycznie dodawać:


Fig 83.

$$[d\zeta_1 r] + [d\zeta_2 . r] = [(d\zeta_1 + d\zeta_2) r]$$

Powyższą własność zastosować można np. przy rozważaniu

obrotów nieskończenie małych koło osi układu prostokątnego x, y, z. Niech δ_α, δ_β, δ_γ przedstawiają odpowiednio wielkości obrotów koło osi x, y, z, to rezultat tych obrotów przedstawi nam wektor δ który jest przekątnią prostopadłościanu zbudowanego na wektorach składowych. Podobnie, oczywiście jak większą ilość obrotów możemy zastąpić przez jeden wypadkowy, tak też możemy obrót wypadkowy rozłożyć na składowe. Porządek składania dowolny; zatem prawo przemienności ważne. Jednem słowem obroty nieskończenie małe są takie same wielkości jak prędkości, przyspieszenia, siły.

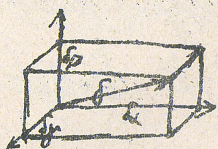


Fig 84.

Przez podzielenie równości (a) przez dt przechodzimy do prędkości:

$$(b) \qquad v_k = v_0 + [\bar{u}_0\, r_k]$$

tj prędkość, jaką ma punkt ciała sztywnego przy przesunięciu ogólnem nieskończenie małem składała się z prędkości <u>postępowej</u>: v_0 i prędkości <u>obrotowej</u>: $[\bar{u}_0\, r_k]$. Przyczem zauważymy, że wielkości opatrzone <u>indeksem: $_0$ są wspólne wszystkim punktom ciała</u>

natomiast owe o wskaźniku: k są indywidualne.

Równania (a) i (b) wyrażone w formie wektorowej rozpadają się przy przejściu do form analitycznych przez rozpisanie według wektorów jednostkowych i, j, k każde na trzy; przyczem prawe strony każdego rozpadną się na sześć składników. Wszystkie te sześć składników określają ruch ciała sztywnego. Powiadamy stąd, że ciało sztywne posiada sześć stopni swobody ruchu.

Możnaby się na ruch ciała sztywnego zapatrywać z innego nieco punktu. Tak czyni np. Ball w swem dwutomowem dziele traktującem o teoryi śrub. Przez ruch śrubowy rozumie on ruch ciała sztywnego złożony z ruchu postępowego i obrotowego. Ruch ten jest uogólnieniem ruchu śruby normalnej; w tej ostatniej ruch postępowy występujący przy skręceniu odbywa się w kierunku osi obrotu; wypadek więc specyalny.

Równania ruchu ciała sztywnego. Wobec tego, że ciało sztywne stanowi szczególny wypadek systemu punktów, dla którego równanie ruchu już wyprowadziliśmy (str 114)., więc dla ciała sztywnego będzie ono również ważne; wystą-

czy tedy powprowadzać w równanie owo wyrażenia jakeśmy tu przyjęli: Równanie owo w formie analitycznej było:

$$\sum_k \left(X_k - m_k \frac{d^2x_k}{dt^2}\right)\delta x_k + \left(Y_k - m_k \frac{d^2y_k}{dt^2}\right)\delta y_k + \left(Z_k - m_k \frac{d^2z_k}{dt^2}\right)\delta z_k = 0$$

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ wyrażają przesunięcia przygotowane. Tutaj przesunięcia przygotowane wyrażone są przez δx_k, bo te czynią zadość warunkom ruchu ciała sztywnego. Trzeba je rozłożyć i wstawić: Jest:

$$\delta r_k = i\,dx_k + j\,dy_k + k\,dz_k$$

$$\delta r_0 = i\,dx_0 + j\,dy_0 + k\,dz_0$$

$$d\gamma_0 = i\,d_\alpha + j\,d_\beta + k\,d_\gamma$$

$$r_k = i\,x_k + j\,y_k + k\,z_k$$

$$\delta r_k = \delta r_0 + [d\gamma_0\, r_k]$$

Zatem

$$i\,dx_k + j\,dy_k + k\,dz_k = i\,dx_0 + j\,dy_0 + k\,dz_0 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ d_\alpha & d_\beta & d_\gamma \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}, \text{ czyli}$$

$$\delta x_k = \delta x_0 + z_k\delta_\beta - y_k\delta_\gamma$$

$$\delta y_k = \delta y_0 + x_k\delta_\gamma - z_k\delta_\alpha$$

$$\delta z_k = \delta z_0 + y_k\delta_\alpha - x_k\delta_\beta\,,$$

przyczem zauważymy, że przesunięcia dla każdego punktu

ciała indywidualne mają indeks: κ, zaś przesunięcia wspólne dla całego ciała indeksu tego nie mają. Teraz trzebaby te wyrażenia wstawić w napisane równanie ruchu. Sprawa przedstawia się jednak prościej, gdy użyjemy symboliki wektorowej. Wyjdziemy więc z równania ruchu (str 114).

$$\sum_{\kappa}\left(f_\kappa - m_\kappa \frac{d^2 r_\kappa}{dt^2}\right)\delta r_\kappa = 0$$

Wobec: $\delta r_\kappa = \delta r_0 + [\delta\zeta_0\, r_\kappa]$, równanie to napiszemy:

$$\sum_{\kappa}\left(f_\kappa - m_\kappa \frac{d^2 r_\kappa}{dt^2}\right)\delta r_0 + \sum_{\kappa}\left(\left(f_\kappa - m_\kappa \frac{d^2 r_\kappa}{dt^2}\right)[\delta\zeta_0\, r_\kappa]\right) = 0$$

W składniku pierwszym tego wyrażenia można δr_0 jako niezależne od sumowania względem κ wyjąć przed znak sumy. W składniku drugim wobec oczywistej prawie własności iloczynu skalarnego: $(a[bc]) = (b[ac]) = (c[ba])$, i niezależności $\delta\zeta_0$ od zmiennej κ, można $\delta\zeta_0$ wyciągnąć przed znak sumy i całe wyrażenie napisać:

$$\delta r_0 \sum_{\kappa}\left(f_\kappa - m_\kappa \frac{d^2 r_\kappa}{dt^2}\right) + \delta\zeta_0 \sum_{\kappa}\left[r_\kappa\left(f_\kappa - m_\kappa \frac{d^2 r_\kappa}{dt^2}\right)\right] = 0$$

Teraz zaś wobec zupełnej dowolności czynników δr_0 i $\delta\zeta_0$, byle były one nieskończenie małe, powiemy: powyższa równość może zachodzić tylko w tym razie, gdy z osobna każdy dodajnik jest równy zeru. Otrzymujemy stąd

dwa równania określające ruch ciała sztywnego:

$$\sum_k f_k = \sum_k m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2}, \quad \sum_k [r_k f_k] = \sum_k m_k \left[r_k \frac{d^2 r_k}{dt^2}\right]$$

Każde z tych dwu równań można rozbić w znany sposób na trzy, przez co dójdziemy do wyrażeń analitycznych ruchu, co bezpośrednio byłybyśmy uzyskali wykonując wspomniane podstawienia w analityczną formę d'Alemberta str 137. Równania te będą:

$$\sum_k X_k = \sum_k m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}, \quad \sum_k (y_k Z_k - z_k Y_k) = \sum_k m_k \left(y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}\right)$$

$$\sum_k Y_k = \sum_k m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}, \quad \sum_k (z_k X_k - x_k Z_k) = \sum_k m_k \left(z_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - x_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}\right)$$

$$\sum_k Z_k = \sum_k m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}, \quad \sum (x_k Y_k - y_k X_k) = \sum_k m_k \left(x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}\right).$$

Z owych równań ruchu można w jednej chwili dojść do warunków równowagi ciała sztywnego, zakładając, że wszystkie przyspieszenia są równe zeru. Tak dostaniemy w symbolice wektorowej jako warunki równowagi:

$$\sum_k f_k = 0 \quad , \quad \sum_k [r_k f_k] = 0$$

Tj warunki równowagi ciała sztywnego są: 1° wypadkowa wszystkich sił działających na to ciało ma być równa zeru

2° wypadkowy moment wszystkich sił działających musi być równy zeru. (Określenie wypadkowego momentu sił str 123).

Przy użyciu równań analitycznych warunki te wyrażą się:

$$\sum_k X_k = 0 \;, \quad \sum_k (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0 \,.$$

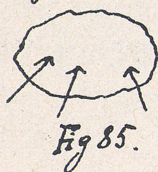
$$\sum_k Y_k = 0 \;, \quad \sum_k (z_k X_k - x_k Z_k) = 0$$

$$\sum_k Z_k = 0 \;, \quad \sum_k (x_k Y_k - y_k X_k) = 0$$

t. j. wszystkie siły muszą być równe zeru i momenty sił również.

Rozważania syntetyczne. Do powyższych równań ruchu i równowagi ciała sztywnego doszliśmy drogą argumentacyi rachunkowej. Można jednak do tych samych wniosków dojść przez argumentacye myślowe syntetyczne:

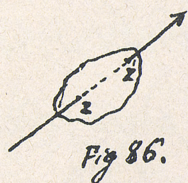
Wyobraźmy sobie bryłę, na którą działają różne siły.


Fig 85.

Pytamy się, jakie są warunki równowagi, w razie jeśli ona zachodzi, a jeśli nie zachodzi równowaga, to jaki nastąpi ruch?

By na te pytania odpowiedzieć, rozważymy różne sposoby składania sił. Tu jest jedna ogólna zasada: Jeśli na ciało sztywne działa jakaś siła, to skutki jej działa-

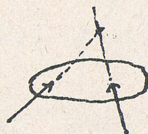
nia będą zawsze takie same byle siła była taka sama i kierunek taki sam. Punkt zaczepienia siły jest obojętny


Fig 86.

o ile jest tylko przesunięty w kierunku siły. Jedni zasadę tę chcą udowodnić z warunków symetryi inni powiadają, że to fakt doświadczalny. Fakt jest, że wnioski wyprowadzone z tej zasady zgadzają się z doświadczeniem. My więc przyjmiemy zasadę tę jako pewnik.



Jeśli siły dwie działają na ten sam punkt, to wypadkowa ich będzie przedstawiona przez przekątnię równoległoboku sił. Jeśli punkty, na które


Fig 87

siły działają są różne, natenczas przydłużamy kierunki sił, aż do punktu przecięcia się i pomyślmy sobie, że tam owe siły zaczepiają, przez co ten wypadek mamy sprowadzony na poprzedni.

Kierunki sił mogą się jednak nie przeciąć choć są dowolnie przydłużone w razie, gdy są równoległe albo wichrowate.

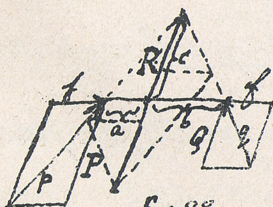


Fig 88

W razie gdy P i Q są równoległe, pomyślmy sobie siły wręcz przeciwne f, których działanie więc znosi się. Przy pomocy sił

tych pomocniczych nakreślimy równoległoboki sił i odpowiednio siły P i f, oraz Q i f zastąpimy przez wypadkowe p, q, które już nie są równoległe, a stąd przetną się ich kierunki w jednym punkcie. Można będzie zastąpić siły p, q przez jedną siłę wypadkową R, której punkt zaczepienia wynikający z podobieństwa trójkątów określi się proporcyą.

$$a:c = f:P \qquad b:c = f:Q$$

$$cf = aP = bQ$$

$$a:b = Q:P.$$

Fig 89.

Konstrukcya ta zmienia się, gdy działają siły równoległe ale w kierunkach przeciwnych w sposób, jak wskazuje Fig 89.

Konstrukcya taka nie uda się, jeśli siły w różnych punktach ciała sztywnego zaczepiające są, równoległe, o przeciwnych kierunkach ale równo wielkie. W tym bowiem razie musiałaby chyba siła równa zeru zaczepiać w nieskończoności. Wynika stąd potrzeba wprowadzenia do mechaniki ciał sztywnych nowego pojęcia, któreby ten ostatni wypadek obejmowało tj: pojęcia <u>pary sił</u> czyli <u>dwójki sił</u>. Widzimy też, że para sił nie da się zastąpić przez

żadną siłę wypadkową.

W razie drugim nieprzecinania się sił t.j. w razie ich wichrowatości dość jest poprowadzić przez punkty zaczepienia sił P i Q

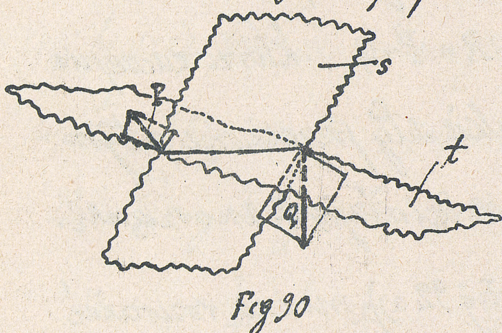
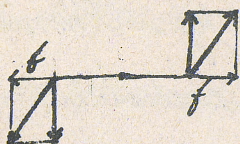


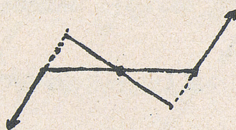
Fig 90

dwie dowolne płaszczyzny s i t i siły P i Q rozłożyć na składowe według równoległoboków, których po dwa boki leżą na owych płaszczyznach. Skutek tego sprowadzimy ten wypadek do wypadku, gdy siły leżą w jednej płaszczyźnie, co już eśmy przedtem rozważyli.

Możemy teraz zająć się parą sił. Para sił powoduje oczywiście obrót systemu około jakiejś osi. Oś ta, gdy uwzględniamy tylko dwa punkty systemu sztywnego jest w środku między temi oboma punktami. Można ogólny wypadek, gdzie siły są dowolnie do łącznicy obu punktów nachylone zredukować do wypadka szczególnego, gdzie siły są prostopadłe do owej łącznicy a to albo przez



a)



b)

Fig 91

wprowadzenie odpowiednich sił pomocniczych f Fig 91 a), albo przez skręcenie łącznicy o pewien kąt Fig 91. b).

Takie pary sił równoważą się, jeśli momenty sił są jednakowe, tj. jeśli: $P.a = Q.b$.



Fig 92 a)

Dla dowodu wystarczy wprowadzić siłę pomocniczą $R = P - Q$, która zaczepia w środku. Dwie takie siły przeciwne w tym samym punkcie działające znoszą się.

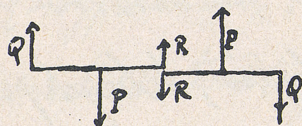


Fig 92 b)

System taki sił (Fig 92 a)) można rozważać jako z dwu części złożony (Fig 92 b)). Każda z tych części jest w równowadze, bo siła $P = R + Q$ przy założeniu, że $P : Q = b : a$. Łatwo to widzieć z uwagi na Fig. 88.

Powyższe rozważania równowagi pary sił przeprowadziliśmy przy założeniu, że ramiona sił mają jednakowe kierunki. Równowaga będzie stało zachodzić także wtedy, gdy je będziemy przesuwać. Wykażemy w tym celu równoważność działania pary sił przy przesuwaniu jej. — Równoważność ta zachodzi 1° gdy parę sił około tej samej osi skręcimy. Pomyślmy sobie bowiem 2 pomocnicze pary sił wzgl. przeciwne dodane do pierwotnej pary sił (Fig 93 b).

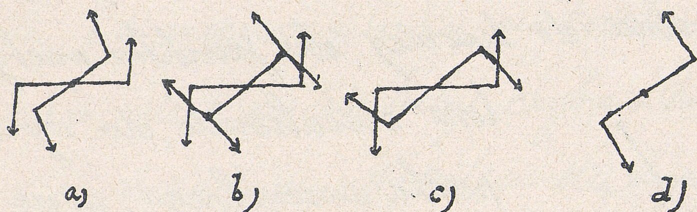


Fig 93

Dodanie takich dwu par sił warunków równowagi wcale nie zmienia. Mają one dowolny kierunek i wielkość. Tę ostatnią pomyślmy sobie tak dobraną, że jest ona równa wielkości pierwotnej pary sił. Skutek będzie ten, że jedna z pomyślanych par sił zniesie się z pierwotną (Fig. 93 c) i pozostanie stąd druga dodana para sił.

2°. Pomyślmy sobie parę sił przesuniętą w płaszczyźnie własnej równolegle (Fig. 94). Znowa zachodzić będzie równoważność działania pary sił w tej nowej pozycji z parą sił pierwotną.

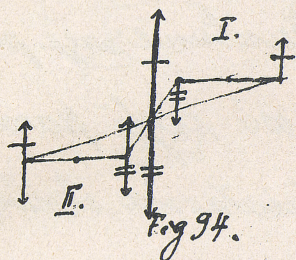


Fig. 94.

By to wykazać, powiedzmy, że do pary sił dodajemy system dwu par sił pomocniczy, których działanie się znosi. Łącząc teraz odpowiednio punkty, jak to wskazuje Fig. 94, możemy rozróżnić dwa systemy sił równoległych i równych jednokrotnie i dwukrotnie poprzekreślanych. System ten oczywiście zostaje w równowadze, a pozostaje tylko para sił nieprzekreślonych jako skutek operacyi nie zmieniającej warunków równowagi.

Może też para sił występować z płaszczyzny własnej. Aby się o tem przekonać wystarczy zwrócić się do Fig. 94, ale przedstawić teraz sobie rzecz tak, że dodany system II występuje

z płaszczyzny pary sił I. Argumentacya zresztą dalsza zostaje takasama.

Widzimy więc z tych rozważań, że możemy parę sił dowolnie przesuwać nie zmieniając przez to skutków jej działania przy założeniu: że momenty sił, czyli wprowadzając pojęcie momentu pary sił tj iloczyn z siły i oddalenia obu sił, że moment pary sił i oś zostają jednakowe. Działanie więc pary sił zależy tylko od momentu i kierunku osi czyli para sił jest wektorem. Ważne są więc dla niej działania określone dla tychże.

Dla przykładu podamy np. jak się dodaje dwie pary sił. Dla ogólności niech uważane pary sił mają różne osie i różne momenty. Powołując się na poprzednie wywody, że można pary sił dowolnie przesuwać byle oś zachowało swój kierunek, pomyślmy, żeśmy jedną z danych dwu par sił tak operowali, że wreszcie ramiona sił dokładnie się nakryły z ramionami drugiej pary sił. Osie oczywiście i momenty sił pozostały niezmienione ze względu na kierunek i wielkość. Łączenie teraz takich dwu par sił redukuje się do składania sił. Łatwo to uogólnić na więcej par sił.

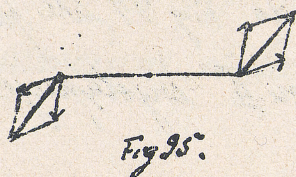


Fig 95.

Na podstawie powyższych wyników łatwo już jest rozważyć ogólny wypadek, gdzie siły jak bądź rozłożone działają na ciało sztywne. Oto każdą siłę F zastąpimy przez siłę F_0, która zaczepia w punkcie O wraz z parą sił $F F_1$. Wszystkie siły F_0 składamy w wypadkową i taksamo wszystkie pary sił zastąpimy przez wypadkową parą sił. Więc ostatecznie ruch jakoteż równowaga ciała sztywnego zależy będzie od owej siły wypadkowej i pary sił wypadkowej. Jeśli czynniki owe nie są równe zeru, to jest ruch, jeśli natomiast równają się zeru, to jest równowaga. Ależ właśnie powiedzenia owe są równoważne równaniom ruchu i równowagi, jakeśmy wyprowadzili na str 139 i 140; trzebaby je tylko ująć w formę matematyczną.

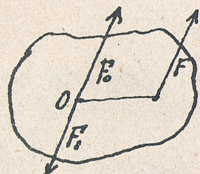


Fig 96

Rozwiązania równań ruchu. Dla wygody zwrócimy się do równań ruchu w formie wektorowej:

$$\sum_k \mathfrak{F}_k = \sum_k m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} \quad , \quad \sum_k [r_k \mathfrak{F}_k] = \sum_k m_k \left[r_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} \right]$$

Równania te można przy wprowadzeniu określenia środka masy: $\textcircled{r} = \frac{\sum m_k r_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k r_k}{M}$ wyrazić prościej:

Pierwsze:

$$\sum f_k = \sum m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_k r_k = \frac{d^2}{dt^2} M \textcircled{r} \quad \text{czyli}$$

$$\text{(a)} \qquad \sum_k f_k = M \frac{d^2 \textcircled{r}}{dt^2}$$

Powiada ono, że środek masy ciała sztywnego doznaje takiego przyspieszenia, jakby w nim wszystkie masy były skoncentrowane i jakby w nim zaczepiała wypadkowa wszystkich sił. Jest to tylko powtórzenie odnośnego prawa, jakieśmy kiedyś wyprowadzili dla systemu punktów.

Również drugie równanie, wypiszmy je jeszcze w formie:

$$\sum_k [r_k f_k] = \frac{d}{dt} \sum m_k \left[r_k \frac{dr_k}{dt} \right]$$

nie powiada nam nic nowego nad to, coś my się już przy systemie punktów dowiedzieli tj. że moment wypadkowy sił równa się czasowej pochodnej momentu wycinkowego wypadkowego. Wprowadźmy jeszcze w to wyrażenie



Fig 97.

określenie środka masy. Niech S będzie środkiem masy. Wzór transformacyjny będzie: $r_k = \textcircled{r} + r_S$ $\quad (r_S = r_{S_K}$ krótko $= r_S)$

gdzie r_s oznacza wektor każdego punktu ciała sztywnego względem środka masy S. Równanie drugie przyjmie kształt:

$$\sum[\textcircled{r} f_k] + \sum[r_s f_k] = \sum m_k\left[\textcircled{r} \frac{d^2\textcircled{r}}{dt^2}\right] + \sum m_k\left[\textcircled{r} \frac{d^2 r_s}{dt^2}\right] +$$

$$\sum m_k\left[r_s \frac{d^2\textcircled{r}}{dt^2}\right] + \sum m_k\left[r_s \frac{d^2 r_s}{dt^2}\right]$$

Wyrażenie to uprości się:

$$\sum[\textcircled{r} f_k] = [\textcircled{r} \sum f_k] = M\left[\textcircled{r} \frac{d^2\textcircled{r}}{dt^2}\right]$$

$\sum m_k\left[\textcircled{r} \frac{d^2\textcircled{r}}{dt^2}\right] = M\left[\textcircled{r} \frac{d^2\textcircled{r}}{dt^2}\right]$. Zatem pierwszy wyraz po lewej i pierwszy po prawej stronie zniosą się.

Wobec definicji środka masy $\textcircled{r} = \frac{\sum m_k r_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k r_k}{M}$

$$\sum m_k r_k = \textcircled{r} M = \sum m_k \textcircled{r} + \sum m_k r_s = \textcircled{r} M + \sum m_k r_s.$$

Zatem $\sum m_k r_s = 0$ oraz $\sum m_k \frac{d^2 r_s}{dt^2} = 0$, a stąd

$\sum m_k\left[\textcircled{r} \frac{d^2 r_s}{dt^2}\right] = 0$ $\sum m_k\left[r_s \frac{d^2\textcircled{r}}{dt^2}\right] = 0$

Ostatecznie więc, gdy dla jednostajności znakowania podajmy przy wszystkich wielkościach podlegających sumowaniu znaczek: s, przez co oczywiście żadnych istotnych zmian nie wprowadzimy, dostaniemy drugie równanie ruchu odniesione do środka masy:

$$\text{(b)} \quad \sum[r_s f_s] = \sum m_s\left[r_s \frac{d^2 r_s}{dt^2}\right] = \frac{d}{dt}\sum m_s\left[r_s \frac{d r_s}{dt}\right]$$

Równanie to zupełnie jest takie same jak poprzednie odniesione do jakiegobądź punktu jako początku układu. Wypadkowy moment sił nie zależy od obioru początku układu.

Reasumując to, cośmy o ruchu ciała sztywnego rozważali, powiemy: Ruch ciała sztywnego składa się z dwu części: z ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego koło środka masy; pierwszy ruch określony jest równaniem (a) str 148, drugi równaniem (b) str 149. Oba ruchy są niezależne od siebie.

Do wniosków tych można dojść naturalnie też drogą analityczną, albo wypisać można równania odnośne po prostu przez rozpisanie równań (a) i (b). Będzie:

$$\sum X_k = M\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \sum(\eta_k Z_k - \zeta_k Y_k) = \sum m_k\left(\eta_k\frac{d^2\zeta_k}{dt^2} - \zeta_k\frac{d^2\eta_k}{dt^2}\right)$$

$$\sum Y_k = M\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \sum(\zeta_k X_k - \xi_k Z_k) = \sum m_k\left(\zeta_k\frac{d^2\xi_k}{dt^2} - \xi_k\frac{d^2\zeta_k}{dt^2}\right)$$

$$\sum Z_k = M\frac{d^2\zeta}{dt^2}, \quad \sum(\xi_k Y_k - \eta_k X_k) = \sum m_k\left(\xi_k\frac{d^2\eta_k}{dt^2} - \eta_k\frac{d^2\xi_k}{dt^2}\right),$$

gdzie ξ, η, ζ oznaczają spółrzędne środka masy, ξ_k, η_k, ζ_k spółrzędne punktu względem środka masy jako początku układu.

Ruch postępowy rozważaliśmy już w dynamice punktu. Wystarczy tedy zająć się tutaj ruchem obrotowym ciała sztyw-

nego. Uważajmy więc jakiekolwiek ciało sztywne obracające się koło osi stale w przestrzeni przełożonej w kierunku zaznaczonym strzałką. Dla prostoty przyjmijmy, że oś obrotu nakrywa się np. z osią z. Na rysunku pomyślanym w płaszczyźnie xy redukuje się ona do punktu 0.

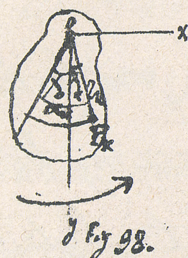


Fig. 98.

Równanie ruchu obrotowego ważne tu, gdy się powołamy choćby np. na str 139, będzie:

$$R = \frac{d}{dt} \sum m_x (x_x \frac{dy_x}{dt} - y_x \frac{dx_x}{dt})$$

tj. moment sił obracających ciało sztywne koło osi z, czyli składowy moment sił względem z, równa się czasowej pochodnej momentu wycinkowego względem osi z.

Nadmienimy tu, że momenty sił względem osi: x, y, z znakować będziemy literami: P, Q, R. Nazywamy je nieraz składowemi ze względu na moment wypadkowy: $\sum [r_x f_x]$. Jeśli chodzić będzie o zaznaczenie kątów przy obrocie względem osi x, y, z, to znakować je będziemy: φ, ψ, χ.

Postarajmy się teraz przetransformować prawą stronę owego równania ruchu przez wprowadzenie spółrzędnych biegunowych. Uważajmy punkt P_x i kąt, jaki promień r_x zamy-

ka, z osią y, w górę zachowaną,: χ_k. Podwójna prędkość wycinkowa, która w równaniu ruchu jest objęta nawiasem, wyrazi się: $r_k^2 \frac{d\chi_k}{dt}$. Po wstawieniu będzie:

$$R = \frac{d}{dt} \sum m_k r_k^2 \frac{d\chi_k}{dt}.$$

Poprowadźmy teraz w ciele sztywnem dowolną prostą, która się z ciałem jednakowo obracało i naznaczmy kąt, jaki ta prosta zamyka z r_k literą α_k. Kąt ten będzie oczywiście stały. Będzie:

$$\chi_k = \alpha_k - \chi_o$$

$$\frac{d\chi_k}{dt} = \frac{d\alpha_k}{dt} - \frac{d\chi_o}{dt} \qquad \text{czyli wobec } \frac{d\alpha_k}{dt} = 0$$

$$\frac{d\chi_k}{dt} = \frac{d\chi_o}{dt} \qquad \text{i stąd}$$

$$R = \frac{d}{dt} \sum_k m_k r_k^2 \frac{d\chi_o}{dt}$$

Wyjmując $\frac{d\chi_o}{dt}$ jako niezależne od wskaźnika sumowania przed znak sumy i znacząc: $\sum_k m_k r_k^2 = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) = K_2$, dostajemy:

$$R = K_2 \frac{d^2\chi_o}{dt^2}$$

Lub opuszczając wskaźnik $_o$, bo obojętną jest rzeczą, którą prostą obierzemy za początek dostajemy:

$$R = K_2 \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

K_z, którego definicyę mamy podaną powyższemi równaniami nazywamy <u>momentem bezwładności</u>. Równanie ostatnie powiada nam, że moment siły równa się iloczynowi z momentu bezwładności i przyspieszenia kątowego. Jest to powiedzenie analogiczne do określenia Newtonowskiego siły. W analogii tej: sile odpowiada moment siły, masie odpowiada moment bezwładności, przyspieszeniu odpowiada przyspieszenie kątowe. Zauważyć jednak trzeba, że moment bezwładności nie jest wielkością stałą podobnie jak masa ciała, ale zmienia się na ogół ze zmianą osi obrotu.

Skutkiem analogii w określeniu momentu siły i siły są też zadania analogiczne. Dla przykładu rozważymy tu kilka.

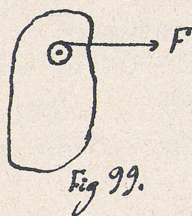
1. Na ciało sztywne działa moment siły równy zeru. Jaki ruch nastąpi? Jest oczywiście $\frac{d^2\chi}{dt^2} = 0$ stąd

$$\chi = ct + Const$$

tzn. ciało to wiruje koło osi ze stałą prędkością wycinkową.

2. Do ciała sztywnego przymocowany jest stale krążek

w sposób jak wskazuje Fig 99. Na krążek nawinięta jest nitka,


Fig 99.

za której stałem ciągnięciem wprawimy ciało w ruch obrotowy. Jeśli promień krążka naznaczymy przez a, siłę zaś działającą przez F, to będzie:

$$R = Fa = K \frac{d\eta}{dt}$$

$$\eta = \frac{Fa}{K} \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$$

tzn. obrót ciała sztywnego będzie się odbywać ruchem jednostajnie przyspieszonym.

3. Analogiczne zadanie jest, gdy zamiast siły wprawiającej ciało w ruch działa siła hamująca. Pomyślmy sobie do powyższego krążka przyłożony hamulec. Siłę tarcia, przyjmijmy, równą się iloczynowi z nacisku p i spółczynnika tarcia ε. Ponieważ wpływ tarcia jest hamujący, zatem równanie różniczkowe ruchu będzie:

$$\varepsilon . p . a = -K \frac{d\eta}{dt^2} \quad \text{skąd}$$

$$\eta = - \frac{\varepsilon p a}{K} \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$$

tzn. ruch będzie jednostajnie opóźniony.

Obliczanie środka masy i momentu bezwładności. Zanim przystąpimy do dalszej teorji ciała sztywnego, zdo-

my sobie sprawę ze sposobów obliczania środka masy i momentu bezwładności pojęć ważnych w dynamice ciał sztywnych.

Co się tyczy środka masy, to wychodzimy z definicyi jego:

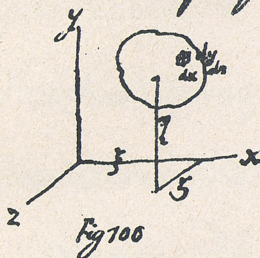


Fig 100

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}$$

$$\eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$$

$$\zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

Jeśli substancya wypełnia w sposób ciągły pewną objętość i jednorodnie tj jeśli gęstość ρ jest wszędzie jednakowa, to element masy:

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz$$

Sumowanie skończone możemy zastąpić przez całkowanie i dostaniemy przeto:

$$\xi = \frac{\iiint x\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

$$\eta = \frac{\iiint y\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

$$\zeta = \frac{\iiint z\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

ρ jako stałe znosi się. Wykonanie całek jest proste, jeśli kształt geometryczny bryły jest prosty. Postępując stosow.

nie możemy obliczyć środek masy pewnych linij, powierzchni, brył, wyobrażając sobie, że są one obłożone pewnemi masami elementarnemi w wszystkich swych punktach.

Jeśli ciało znajduje się w polu grawitacyjnem np. na powierzchni ziemi, to środek masy nakrywa się ze środkiem ciężkości. Na każdy element masy ciała działa siła ciężkości proporcjonalna do masy tego elementu. Każda taka siła stara się obrócić ciało około osi z, mają one bowiem wszystkie jednakowy kierunek tj. pionowy. Moment pojedynczej siły tj. iloczyn z siły i ramienia jest: $g\varrho\,dx\,dy\,dz.x$. Wypadkowy zatem moment:

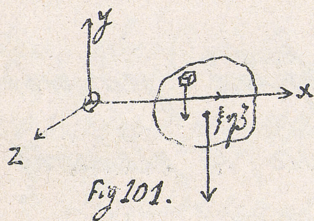


Fig 101.

$$R = \sum g\varrho\, dx\, dy\, dz.x$$
$$= g\sum m x$$

czyli wobec definicyi środka masy $\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}$

$$R = \xi . g\sum m$$

czyli

$$R = \xi . G$$

tj. siła wypadkowa ciężkości G zaczepia w punkcie, którego współrzędna jest ξ. Analogicznie powiemy, że każda siła elementarna stara się obrócić ciało koło osi x. Dostanie-

my stąd: $P = \zeta G$

Mamy więc określony rzut środka ciężkości na płaszczyznę xz, odpowiadający zupełnie definicyi środka masy. A ponieważ punkt przyczepienia można dowolnie przesuwać wzdłuż kierunku siły, więc można jako punkt zaczepienia obrać sam środek masy $\{\xi\ \eta\ \zeta\}$. Zatem istotnie środek masy nakrywa się z środkiem ciężkości, jeśli ciało znajduje się w polu grawitacyjnem przy założeniu, że siły są równoległe i mają jednakowy kierunek. Oczywiście nie będzie to zachodzić dla ciała na powierzchni ziemi się znajdującego, jeśli uwzględnimy zmienność kierunku i natężenia ciężkości.

Co się tyczy momentu bezwładności, to wychodząc z definicyi wyżej podanej i zastępując sumowanie skończone przez całki dostaniemy:

$$K_z = \rho \iiint (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$K_x = \rho \iiint (y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$K_y = \rho \iiint (x^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Przykłady: 1. Obliczyć moment bezwładności masy liniowo rozmieszczonej względem osi prostopadłej przez koniec przełożonej. ($\rho = 1$). Będzie:

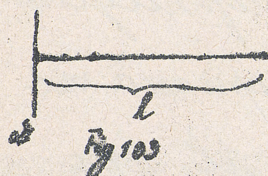


Fig 103

$$K = \int_0^l x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{l^3}{3}$$

2. Tosamo, gdy oś przez środek odcinka przechodzi:

$$K = 2\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{l^3}{12}$$

Zatem teraz moment bezwładności jest czwartą częścią poprzedniego.

3. Obliczyć moment bezwładności równoległościanu względem osi z przez krawędź przechodzącą.

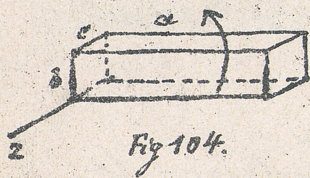


Fig 104.

$$K_z = \int_0^a\int_0^b\int_0^c (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint x^2 dx\,dy\,dz + \iiint y^2 dx\,dy\,dz$$

Całkowania te są niezależne od siebie, zatem całka potrójna będzie iloczynem trzech całek.

$$K_z = \frac{a^3}{3}bc + a\frac{b^3}{3}c = \frac{abc}{3}(a^2+b^2) = \frac{M}{3}(a^2+b^2),$$

gdzie M oznacza masę całego równoległościanu ($\rho = 1$), a^2+b^2 przekątnię. Zatem moment bezwładności taki, jak

by trzecia część masy była skoncentrowana na końcu przekątni.

4. Tosamo, gdy oś przez środek przechodzi.

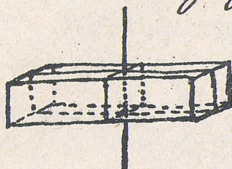


Fig 105.

$$K_o = 4\,\frac{\frac{M}{4}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)}{3} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$$

Znowu więc moment jest cztery razy mniejszy niż poprzód.

5. Obliczyć moment bezwładności krążka względem osi przechodzącej prostopadle do płaszczyzny przez środek.

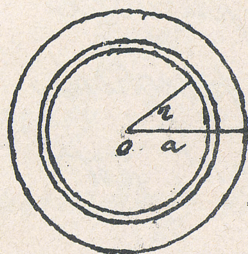


Fig 106

Pas elementarny ma masę: $2\pi r\,dr$.

Zatem:

$$K = \int_0^a 2\pi r\,dr \cdot r^2 = \frac{2\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2} =$$

$$= \frac{M}{2}a^2$$

Podobnie obliczy się moment bezwładności krążka, gdy oś obrotu jest przełożona przez jego płaszczyznę, dalej kuli, walców i t. d.

<u>Twierdzenie Steinera</u>. Jeśli rozważamy momenty bezwładności danego ciała względem różnych osi, przełożonych równolegle przez to ciało sztywne, to dla każdej z nich moment bezwładności jest wogóle różny

Oznaczmy przez K_o moment bezwładności względem osi y przechodzącej przez środek masy.

$$K_o = \sum m(x^2+z^2)$$

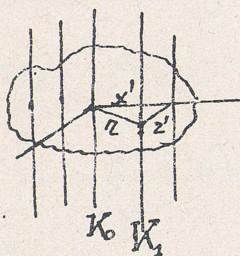


Fig 107.

Jeśli x' i z' określają nam inną oś równoległą do pierwszej, to moment bezwładności względem niej jest:

$$K_1 = \sum m[(x-x')^2+(z-z')^2] =$$

$$= \sum m(x^2+z^2) + \sum m(x'^2+z'^2) - 2\sum mxx' - 2\sum mzz'.$$

$$= \sum m(x^2+z^2) + (x'^2+z'^2)\sum m - 2x'\sum mx - 2z'\sum mz$$

Lecz $\sum mx = \sum mz = 0$., bo powiedzieliśmy, że pierwsza oś obrotu, ze względu na którą x i z są brane, przechodzi przez środek masy. Z uwagi nadto, że $x'^2+z'^2=r^2$, jest

$$K_1 = K_o + r^2 M$$

i to jest właśnie tw. Steinera o momentach bezwładności. Powiada ono, że najmniejszy moment bezwładności ciała sztywnego jest dla osi przechodzącej przez środek masy. Każdy inny z powodu, że $r>0$ i $M>0$ jest od niego większy.

Stosując tw. Steinera np. do przykładu 4. wyżej, mamy:

$$K = K_o + M\frac{a^2+b^2}{4}$$

Lecz $K_0 = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$. Zatem $K = M(a^2+b^2)\{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\} =$
$= \frac{M}{3}(a^2+b^2)$, co istotnie, jak wyżej widzieliśmy, zachodzi.
Jako przykład powyższych rozważań nad momentem bezwładności i środkiem masy rozpatrzymy:
Wahadło fizyczne. Nazywamy tak dowolną bryłę obracającą się koło osi, którą tu dla prostoty nazwijmy z. Poprowadźmy w tem wahadle prostą, ze względu na którą będziemy rachowali wychylenia od pionu. Najprościej będzie jeśli ta prosta będzie przechodzić przez środek masy S. To więc zatórzmy. Za kierunek dodatni wychyleń uważamy ten, który jest zaznaczony strzałką. Jaki ruch?

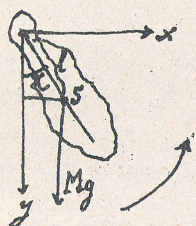


Fig 108.

W środku ciężkości zaczepia siła Mg. Ramię tej siły jest: $l\sin\chi$.
Zatem równanie różniczkowe ruchu jest:

$$K\frac{d^2\chi}{dt^2} = -Mgl\sin\chi$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{Mgl}{K}\sin\chi$$

O ile wychylenia małe upraszcza się to równanie do:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{Mgl}{K}\chi$$

Kształt taki sam, jak już nieraz przy wahadle matema-

tycznem spotykaliśmy. Zatem rozwiązanie jest:

$$x = x_0 \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Sprawdzając, dostajemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0\alpha^2 \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Zatem: $\alpha = \sqrt{\frac{Mgl}{K}}$. Stąd dostajemy okres wahnień.
Połóżmy $\alpha T = 2\pi$, to $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ czyli

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{Mgl}}$$

Według tw. Steinera: $K = K_0 + l^2 M$, jeśli K_0 oznacza moment bezwładności wahadła względem osi z_0 przechodzącej przez środek ciężkości zaś l oznacza odległość osi równoległej od tamtej z_0. Stąd

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K_0 + l^2M}{Mgl}}$$

l można zmieniać nie zmieniając K_0 i M. Stąd okres T zależy od l.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K_0}{Mgl} + \frac{l}{g}}$$

Dla $\left.\begin{matrix} l = 0 \\ l = \infty \end{matrix}\right\}$ okres T staje się nieskończenie duży

Gdybyśmy użyli przedstawienia graficznego obierając na osie układu: T i l, dostalibyśmy krzywą tego rodzaju jak przedstawia Fig 109. Jednej wartości T odpowiada

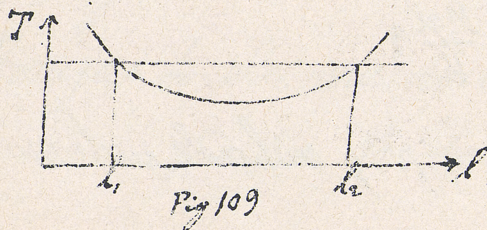


Fig 109

dwie wartości na l. Wynika to bezpośrednio stąd, że równanie na T jest drugiego stopnia względem l. Mamy:

$$g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{K_0}{Ml} + l$$

$$l^2 - l\,g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = -\frac{K_0}{M}$$

$$l = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \pm \sqrt{\left[\frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]^2 - \frac{K_0}{M}}$$

Jeśli wartość na l ma być rzeczywista, to wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne. Przyjmując, że jest dodatnie, dostaniemy dwie wartości na l:

$$l_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 + \sqrt{}$$

$$l_2 = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - \sqrt{}$$

$$l_1 + l_2 = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1+l_2}{g}}$$

Dostaliśmy więc na okres wahadła fizycznego wzór taki sam, jaki mamy na okres wahadła matematycznego o długości l_1+l_2. Zarazem widzimy tu, że aby obliczyć okres T wahadła fizycznego, nie trzeba znać K i M, wystarczy znać tylko l_1 i l_2. Przez to sprawa się ogromnie upraszcza, bo drogą rachunkową obliczanie K nie może być dość dokładne, ponieważ własności fizyczne wahadła nie muszą być zawsze łatwe do ujęcia

rachunkowego i zawsze przecież kształt bryły nie będzie dokładnie rachunkiem oddany. Natomiast l_1 i l_2 drogą empiryczną daleko łatwiej znaleźć. Na tem polega wahadło rewersyjne wynalezione przez kapitana angielskiego Katera. Dla danego okresu T znajdą się dwie wartości l_1 i l_2 takie, iż

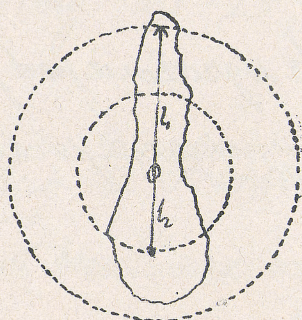


Fig 110.

wahadło w nich zawieszone będzie miało właśnie ten okres. Może naturalnie się zdarzyć, że dla pewnego okresu nie znajdą się w danej bryle takie punkta, aby wahadło w nich zawieszone dawało żądany okres. Wystarczy wtedy dołączyć do takiego wahadła jakieś połączenia sztywne i przezto można już osiągnąć ów okres. Służy wahadło, jak wiadomo, do mierzenia czasu, oraz do oznaczania przyspieszenia ziemskiego g. Dla różnych miejsc na ziemi jest owo przyspieszenie różne. Dla szerokości geograficznej φ, zredukowane do poziomu morza:

$$g = 978{\cdot}103\left[1 + 0{\cdot}005177 \sin^2\varphi\right] \ \mathrm{cm/sek}$$

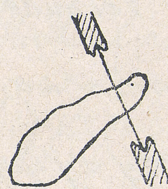
(wzór empiryczny). Największe jest g na biegunie ziemskim, bo odstęp od środka ziemi najkrótszy i nie działa siła odśrodkowa. Dla $\varphi = 45^\circ$, $g = 980{\cdot}606$, długość wahadła sekundowego względnie

dwusekundowego wynosi $l = 99{\cdot}356$ cm. Zauważymy tu, że niewłaściwie niekiedy używa się na okres wzoru $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ zamiast $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Należy zatem zawsze się upewnić, gdy się mówi o wahadle sekundowem, czy ma się na myśli wzór pierwszy czy drugi. Wielkości g istnieją lokalne odchylenia nie tylko z powodu szerokości geograficznej i wysokości nad poziom morza w różnych miejscach różnej lecz też z tego powodu, że masy wewnątrz ziemi są rozłożone nieregularnie. Wykonał w tym względzie systematyczne badania major austryacki Sterneck. Wyniki są bardzo ciekawe. Ciężkość jest wielkością bardzo nieregularną. Przy porównaniu redukuje się ją do poziomu morza, co jest łatwą rzeczą na podstawie teoryi potencyału. Okazuje się, że w górach g jest mniejsze niż w dolinach. Powód tego nie jest jeszcze zadowalniająco wyjaśniony. Wzwiązka ma to być z izostazyą, poglądu, że góry są lżejszemi częściami ziemi podobnie jak lód na wodzie.

Rachunki powyższe ważne są pod założeniem, że kąt χ jest mały. Poprawkę uskutecznia się tak samo, jak przy wahadle matematycznem.

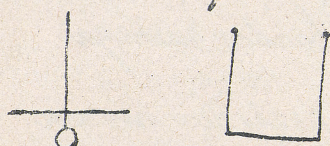
Gdyby się umieściło wahadło na osi pionowej, to oczywiście

wahnień nie będzie żadnych, gdy się jednak oś nieco nachyli, dostaniemy wahadło, dla którego okres wahania


Fig 111.

oznaczy się takżsamo jak poprzód. Wahadło takie nazywamy poziomowem. Zastosowanie ma ono w konstrukcji sejsmografu.

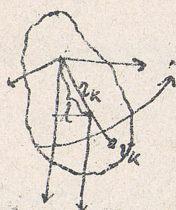
Możnaby jeszcze inne przykłady podać na zastosowanie momentu bezwładności n. p.: ruch torsyjny, w którym belka powieszona poziomo na nitce pionowej wykonuje wahnienie.


Fig 112.

Siła sprężystości nitki równa jest tu sile torsyjnej; dalej zawieszenia bifilarne itd. Do rozwiązania tego rodzaju zadań służy najlepiej zasada zachowania energii.

Energia ciała sztywnego obracającego się.

Energię kinetyczną punktu poruszającego się ruchem postępowym z prędkością v, określamy jak wiadomo iloczynem $\frac{mv^2}{2}$, systemu punktów, a więc i ciała


Fig 112

sztywnego sumą iloczynów $\sum_k \frac{m_k v_k^2}{2}$. Analogicznie energię kinetyczną punktu obracającego z prędkością: $v = r\frac{d\chi}{dt}$,

określamy iloczynem: $\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$, zaś energię kinetyczną ciała sztywnego obracającego się określamy sumą iloczynów: $L = \frac{1}{2} \sum m_k r_k^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$. Wobec zaś tego, że prędkość kątowa $\frac{d\alpha}{dt}$ jest dla wszystkich punktów jednakowa, możemy ją więc wyjąć przed znak sumy. Stąd

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \sum_k m_k r_k^2 \qquad \text{czyli}$$

$$L = \frac{1}{2} \omega^2 K ,$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową wspólną dla wszystkich punktów ciała sztywnego, K moment bezwładności względem uważanej osi obrotu i różny naturalnie dla różnych osi na ogół.

Dla systemu punktów wyprowadziliśmy przy założeniu, że siły są potencyalne (str 119) zasadę zachowania energii mechanicznej:

$$L + U = \text{Const.}$$

Zasada ta będzie oczywiście przy tem samem założeniu i tutaj dla ciała sztywnego ważna. Gdy ciało obraca się pod wpływem ciężkości koło osi poziomej z, to energię po=

-tencyalną oznaczy się, tak jakby wszystkie siły były skoncentrowane w środku ciężkości:

$$U = -Mgl\cos\chi \qquad (\text{analog}: U = -mgy).$$

Stosując zatem zasadę zachowania energii, mamy

$$\frac{1}{2}K\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 - Mgl\cos\chi = Const$$

równanie takie same jak przy wahadle matematycznem; gdy zróżniczkujemy, dostaniemy:

$$K\frac{d\chi}{dt}\frac{d^2\chi}{dt^2} + Mgl\sin\chi\frac{d\chi}{dt} = 0 \quad \text{czyli}$$

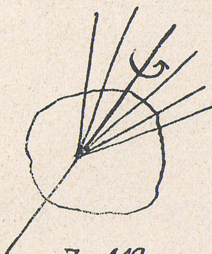
$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{Mgl}{K}\sin\chi$$

Widzimy zarazem, że jest to najprostsza droga do uzyskania równania różniczkowego ruchu, gdy jest dana jedna tylko swoboda ruchu (tu po kole).

Elipsoida bezwładności. Mieliśmy wyżej tw. Steinera wyrażające zależność momentu bezwładności od pozycji różnych osi równoległych. Teraz założymy, że oś obrotu ma stale przechodzić przez pewien punkt*) a może zmieniać tylko kierunek i zapytamy się o zależność momentu bezwładności od tak określonych pozycji osi. W tym celu wyjdziemy z wyrażenia na

*) Np. środek masy.

energię kinetyczną ciała sztywnego obracającego się koło dowolnej osi w przestrzeni:


Fig 113.

$$L = \frac{1}{2} K\omega^2 \quad \text{czyli}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum m v_k^2$$

Rozpiszmy wyrażenie to. Wiemy (str 135), że prędkość wirowania:

$$v_k = [u\, r_k] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d\varphi}{dt} & \frac{d\psi}{dt} & \frac{d\chi}{dt} \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} =$$

$$= i\left(z_k \frac{d\psi}{dt} - y_k \frac{d\chi}{dt}\right) + j\left(x_k \frac{d\chi}{dt} - z_k \frac{d\varphi}{dt}\right) + k\left(y_k \frac{d\varphi}{dt} - x_k \frac{d\psi}{dt}\right),$$

przyczem prędkość kątowa u oraz jej składowe $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}$ są dla wszystkich punktów ciała sztywnego wspólne.

$$L = \frac{1}{2} \sum m_k \left\{ \left[z_k \frac{d\psi}{dt} - y_k \frac{d\chi}{dt}\right]^2 + \left[x_k \frac{d\chi}{dt} - z_k \frac{d\varphi}{dt}\right]^2 + \left[y_k \frac{d\varphi}{dt} - x_k \frac{d\psi}{dt}\right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) -$$

$$- \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} \sum m_k x_k y_k - \frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt} \sum m_k y_k z_k - \frac{d\chi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \sum m_k z_k x_k .$$

Wprowadzając skrócenia:

$$\sum m_k (y_k^2 + z_k^2) = K_x \qquad \sum m_k x_k y_k = D_{xy}$$

$$\sum m_k (z_k^2 + x_k^2) = K_y \qquad \sum m_k y_k z_k = D_{yz}$$

$$\sum m_k (x_k + y_k^2) = K_z \qquad \sum m_k z_k x_k = D_{zx}$$

mamy:

$$L = \frac{1}{2}\Big\{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 K_x + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 K_y + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 K_z - 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}D_{xy} - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}D_{yz} - 2\frac{d\chi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}D_{zx}\Big\}.$$

K_x, K_y, K_z są to, jak wiemy momenty bezwładności ze względu na osie: x, y, z; D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} nazywamy z powodów, które później podamy, <u>momentami dewiacyjnemi</u>. Obracajmy ciało około różnych osi przez ten sam punkt przechodzących i nakreślmy na każdej z nich wektor prędkości $\vec{u}$ z jaką się ciało około każdej z tych osi, przy założeniu że energia $L_0 = Const$ jest stale jednakowa, obraca. Wyobraźmy sobie jedną z takich osi o kierunku: $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$. Prędkość, z jaką ciało około tej osi wiruje, naznaczmy $\omega = |\vec{u}|$. Prędkości: $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}$ będą jej składowemi:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega\cos\lambda$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega\cos\mu$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \omega\cos\nu$$

Będzie zatem:

$$L_0 = \frac{\omega^2}{2}\Big\{K_x\cos^2\lambda + K_y\cos^2\mu + K_z\cos^2\nu - 2D_{xy}\cos\lambda\cos\mu - 2D_{yz}\cos\mu\cos\nu - 2D_{zx}\cos\nu\cos\lambda\Big\}$$

czyli wprowadzając skrócenia: $\omega \cos\lambda = \xi$, $\omega \cos\mu = \eta$, $\omega \cos\nu = \zeta$ mamy

$$L_0 = \frac{1}{2}\left\{K_x \xi^2 + K_y \eta^2 + K_z \zeta^2 - 2D_{xy}\xi\eta - 2D_{yz}\eta\zeta - 2D_{zx}\zeta\xi\right\}.$$

Analogiczne równanie dostaniemy dla każdej innej osi obrotu, przyczem K_x, K_y, ... D_{zx}, L_0 są stałe, a dobieramy tylko ξ, η, ζ tj owe prędkości ω. Dostaliśmy tak równanie stopnia drugiego o zmiennych ξ, η, ζ. Punkty więc końcowe naszych wektorów prędkości u będą leżyć na powierzchni stopnia drugiego. Lecz ξ, η, ζ nigdy nie mogą się stać nieskończonemi, bo u jest wielkością skończoną, zatem powierzchnia uważana jest elipsoidą ze środkiem w punkcie tym, przez który wszystkie osie obrotu przechodzą. Jest to elipsoida bezwładności. Wiadomo z geometryi analitycznej, że elipsoida posiada trzy osie symetryi prostopadłe do siebie i że równanie jej do tych osi sprowadzone upraszcza się. Znacząc momenty bezwładności: A, B, C i spółrzędne ze względu na osie główne: p, q, r dostajemy uproszczone równanie elipsoidy bezwładności (odniesione do osi głównych):

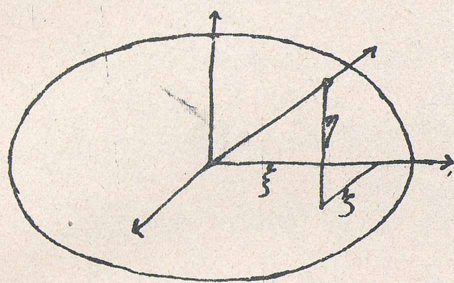


Fig 114.

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=Const.$$

W innej formie można napisać to równanie:

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2+\left(\frac{q}{b}\right)^2+\left(\frac{r}{c}\right)^2=1$$

gdzie: a, b, c oznaczają połówki osi głównych. Stąd

$$a \backsim \frac{1}{\sqrt{A}}\ ,\quad b \backsim \frac{1}{\sqrt{B}}\ ,\quad c \backsim \frac{1}{\sqrt{C}}$$

Bezwzględna wartość zależy od obranej jednostki. Widzimy już stąd, że można wprost drogą konstrukcyjną oznaczyć moment bezwładności ciała sztywnego dla danej osi. Mając bowiem elipsoidę bezwładności wystarczy w żądanym kierunku nakreślić promień ze środka jej aż do przecięcia się z powierzchnią elipsoidy. Będzie to prędkość ω. Ponieważ zachodzi oczywiście proporcya: np.

$$\frac{K}{B}=\frac{b^2}{\omega^2}$$

zatem przy znanych; B, b, ω mamy też oznaczony moment bezwładności K ze względu na uważaną oś obrotu.

Można też moment bezwładności K wyrachować zapomocą: ξ, η, ζ, gdy znane są momenty K_x K_y K_z i D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}, lub zapomocą p q r, gdy znane są A, B, C.

Doszliśmy do elipsoidy bezwładności posługując się energią kinetyczną. Można też dojść do tego samego bezpośrednio wychodząc z określenia momentu bezwładności dla jakiejś osi: np. o kierunku λ, μ, ν:

$$K = \sum m_k R_k^2$$

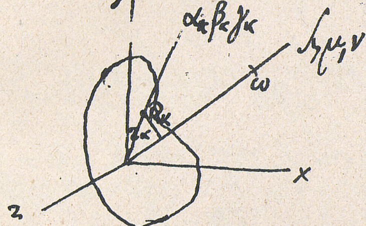


Fig 115.

Lecz: $R_k = r_k \sin \varepsilon_k$, zatem

$$K = \sum m_k r_k^2 (1 - \cos^2 \varepsilon_k),$$

gdzie $\cos \varepsilon_k = \cos\lambda \cos\alpha_k + \cos\mu \cdot \beta_k + \cos\nu \cdot \gamma_k$.

czyli z uwagi, że: $r_k \cos \varepsilon = x_k \cos\lambda + y_k \cos\mu + z_k \cos\nu$,

$$K = \sum m_k \left[(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k^2 \cos^2\lambda + y_k^2 \cos^2\mu + z_k^2 \cos^2\nu + 2 x_k y_k \cos\lambda \cos\mu + 2 x_k z_k \cos\lambda \cos\nu + 2 y_k z_k \cos\mu \cos\nu) \right]$$

Pierwszy składnik nawiasu [ ] pomnożymy przez: $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$ i uporządkujmy. Będzie:

$$K = \cos^2\lambda \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2\mu \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \cos^2\nu \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$$
$$- 2 \cos\lambda \cos\mu \cdot \sum m_k x_k y_k - 2 \cos\lambda \cos\nu \sum m_k x_k z_k - 2 \cos\mu \cos\nu \sum m_k y_k z_k,$$

czyli wprowadzając skrócenia, mamy:

$$K = K_x \cos^2\lambda + K_y \cos^2\mu + K_z \cos^2\nu -$$
$$- 2 D_{xy} \cos\lambda \cos\mu - 2 D_{yz} \cos\mu \cos\nu - 2 D_{zx} \cos\nu \cos\lambda.$$

Dostaliśmy więc wzór na moment bezwładności względem osi

o kierunku $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$. Postępując dalej tak samo jak poprzednio, a więc odcinając na każdej z takich osi przez punkt obrotu przechodzącej prędkość wirowania $w = \frac{Const}{\sqrt{K}}$, dostajemy znowu elipsoidę bezwładności.

W szczególności elipsoida bezwładności przechodzi w kulę. Wtedy każdy moment bezwładności wskutek symetryi ciała jest jednakowy. Dzieje się to np. dla kostki, kuli, wirującej około osi przechodzącej przez jej środek. Może też elipsoida bezwładności być obrotową tj. o dwu osiach głównych jednakowych; trzecia może być dowolna. Zachodzi to np. dla walca, graniastosłupa czworo-, sześciościennego. W ogólności jednak dla ciał sztywnych niesymetrycznie względem uważanego pęku osi obrota ułożonych wszystkie trzy osie elipsoidy bezwładności są różne.

<u>Momenty dewiacyjne.</u> Aby określić znaczenie momentów dewiacyjnych: D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}, uważajmy ciało sztywne obracające się np. koło osi z w kierunku strzałki. Momenty sił względem osi z, x, y wyrażają

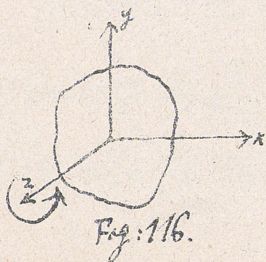


Fig: 116.

się, jak wiemy:

$$R = \sum(xY - yX) = \sum m_\kappa\left(x_\kappa \frac{d^2y_\kappa}{dt^2} - y_\kappa \frac{d^2x_\kappa}{dt^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum m_\kappa\left(x_\kappa \frac{dy_\kappa}{dt} - y_\kappa \frac{dx_\kappa}{dt}\right)$$

$$P = \frac{d}{dt}\sum m_\kappa\left(\cancel{y_\kappa \frac{dz_\kappa}{dt}} - z_\kappa \frac{dy_\kappa}{dt}\right)$$

$$Q = \frac{d}{dt}\sum m_\kappa\left(z_\kappa \frac{dx_\kappa}{dt} - \cancel{x_\kappa \frac{dz_\kappa}{dt}}\right)$$

Wyrażenia te w uważanym wypadku uproszczą się, gdy zważymy co przedstawiają $\frac{dx_\kappa}{dt}, \frac{dy_\kappa}{dt}, \frac{dz_\kappa}{dt}$. Prędkość wirowania w ogólnym wypadku jest:

$$v_\kappa = [u\, r_\kappa] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d\varphi}{dt} & \frac{d\psi}{dt} & \frac{d\chi}{dt} \\ x_\kappa & y_\kappa & z_\kappa \end{vmatrix}$$

Składowe jej zatem:

$$\frac{dx_\kappa}{dt} = \cancel{z_\kappa \frac{d\psi}{dt}} - y_\kappa \frac{d\chi}{dt}$$

$$\frac{dy_\kappa}{dt} = x_\kappa \frac{d\chi}{dt} - \cancel{z_\kappa \frac{d\varphi}{dt}}$$

$$\cancel{\frac{dz_\kappa}{dt}} = \cancel{y_\kappa \frac{d\varphi}{dt}} - \cancel{x_\kappa \frac{d\psi}{dt}}$$

Ponieważ jednak ciało, jak zakładamy, wiruje koło osi z, zatem $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = 0$, i stąd zostają w wyrażeniach tylko składniki nieprzekreślone, i stąd momenty sił będą:

$$R = \frac{d}{dt}\sum m_\kappa(x_\kappa^2 + y_\kappa^2)\frac{d\chi}{dt}$$

$$P = -\frac{d}{dt}\sum m_\kappa x_\kappa z_\kappa \frac{d\chi}{dt}$$

$$Q = -\frac{d}{dt}\sum m_\kappa y_\kappa z_\kappa \frac{d\chi}{dt}$$

Znowu do tego samego można dojść bezpośrednio. Z rysunku

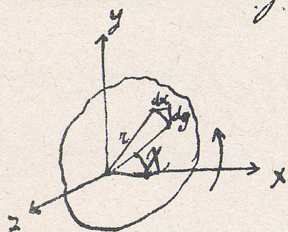


Fig 117.

wprost widać, że

$$\frac{dy_k}{dt} = r_k \frac{d\chi}{dt}\cos\varphi = x_k \frac{d\chi}{dt}, \quad \text{a więc}$$

$$P = -\frac{d}{dt}\sum m_k x_k z_k \frac{d\chi}{dt} \quad \text{itd.}$$

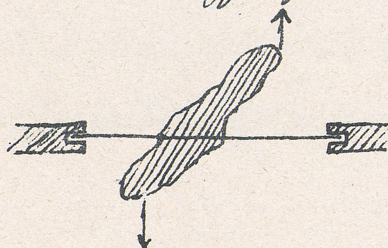
Lecz
$$\frac{d}{dt}\left(x_k z_k \frac{d\chi}{dt}\right) = \frac{dx_k}{dt} z_k \frac{d\chi}{dt} + x_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2} =$$
$$= -y_k z_k \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + x_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y_k z_k \frac{d\chi}{dt}\right) = \frac{dy_k}{dt} z_k \frac{d\chi}{dt} + y_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2} = x_k z_k \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + y_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

Wstawiając te wartości, dostajemy:

$$R = K_z \frac{d^2\chi}{dt^2}$$
$$P = +\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 D_{yz} - \frac{d^2\chi}{dt^2} D_{xz}$$
$$Q = -\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 D_{xz} - \frac{d^2\chi}{dt^2} D_{yz}$$

Widzimy stąd, że ażeby utrzymać oś obrotu z w kierunku niezmiennym trzeba wywierać pewne momenty (siły). Wielkość tych momentów zależy właśnie od momentów dewiacyjnych. Te ostatnie mają związek z asymetrycznością ciała względem osi wirowania. W czasie ruchu bowiem powstają siły odśrodkowe, które starają się oś wychylić. Jeżeli ciało jest symetrycznie rozłożone względem osi obrotu, (oś


Fig 118.

wirowania musi, wtedy przechodzić przez środek masy, to elipsoida bezwładności jest wtedy obrotowa i momenty dewiacyjne znikają. Rozumiemy więc, stąd związek, jaki zachodzi między permanencyą wirowania ciała sztywnego a osią, około której ciało się obraca bez wywierania osobnych w tym celu sił. Zachodzi tu pewna analogia ze stanem równowagi stałej.

Jeszcze by nam zostawała sprawa obliczania momentów dewiacyjnych. Muszą się one obliczyć z momentów bezwładności tj. muszą się dać wyrazić przez spółczynniki elipsoidy, bo gdy tę ostatnią sprowadzimy do osi głównych, to one znikają. Można to jednak uskutecznić bezpośrednio z definicyi. Wiemy np. że:

$$D_{xy} = \sum m_k x_k y_k$$

Stosując znany wzór transformacyjny:

$$x = \xi \cos(\xi x) + \eta \cos(\eta x) + \zeta \cos(\zeta x),$$

$$y = \xi \cos(\xi y) + \eta \cos(\eta y) + \zeta \cos(\zeta y)$$

mamy:

$$D_{xy} = \cos\xi x \cos\xi y \sum \xi^2 m + \cos\eta x \cos\eta y \sum m\eta^2 + \cos\zeta x \cos\zeta\eta \sum m\zeta^2 +$$

$$+ (\cos\xi x \cos\eta y + \cos\xi y \cos\eta x) \sum m\xi\eta + (\cos\eta x \cos\zeta y + \cos\eta y \cos\zeta x) \sum m\eta\zeta +$$

$+(\cos\zeta x \cos\zeta y + \cos\zeta y \cos\eta x) \sum m \xi\zeta$.

Zauważymy tu natychmiast, że w myśl określenia:

$$\sum m\xi\eta = D_{\xi\eta} = 0, \quad \sum m\eta\zeta = D_{\eta\zeta} = 0, \quad \sum m\xi\eta = D_{\xi\zeta} = 0,$$

bo momenty dewiacyjne dla elipsoidy bezwładności o osiach głównych znikają. Z uwagi, że $\xi^2+\eta^2+$ $+\zeta^2=\rho^2$, możemy to co zostaje napisać tak:

$$D_{xy} = \cos\xi x \cos\xi y \sum m[\rho^2-(\eta^2+\zeta^2)] + \cos\eta x \cos\eta y \sum m[\rho^2-(\xi^2+\zeta^2)]$$

$$+ \cos\zeta x \cos\zeta y \sum m[\rho^2-(\xi^2+\eta^2)]$$

$$= (\cos\xi x \cos\xi y + \cos\eta x \cos\eta y + \cos\zeta x \cos\zeta y) \sum m\rho^2 -$$

$$- \cos\xi x \cos\xi y \sum m(\eta^2+\zeta^2) - \cos\eta x \cos\eta y \sum m(\xi^2+\zeta^2) -$$

$$- \cos\zeta x \cos\zeta y \sum m(\xi^2+\eta^2).$$

Lecz spółczynnik przy $\sum m\rho^2$ znika, bo oznacza on $\cos(x\,y)=0$. Inne sumy oznaczają nam znowu momenty bezwładności ze względu na osie główne elipsoidy. Jest więc istotnie:

$$-D_{xy} = A\cos\xi x \cos\xi y + B\cos\eta x \cos\eta y + C\cos\zeta x \cos\zeta y$$

tj. moment dewiacyjny wyraża się przez spółczynniki elipsoidy bezwładności. Oczywiście taksamo

wyraži się: $-D_{yz}$, $-D_{zx}$

Strona mechaniczna ruchów obrotowych. W ogólnym wypadku, gdy jakieś ciało wiruje koło jakiejś osi, to moment siły P wyraži się:

$$P = \sum(yZ - zY) = \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\sum m r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\sum m(y^2+z^2)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(K_x\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Analogicznie oczywiście wyrażą się momenty Q i R. Zatem

$$P = \frac{d}{dt}\left(K_x\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$Q = \frac{d}{dt}\left(K_y\frac{d\psi}{dt}\right)$$

$$R = \frac{d}{dt}\left(K_z\frac{d\chi}{dt}\right),$$

gdzie więc P, Q, R oznaczają momenty sił składowe w kierunku osi układu prostokątnego xyz; $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$ składowe prędkości wirowania koło tychże osi; K_x, K_y, K_z składowe momentu bezwładności. Zauważymy, że należy ściśle odróżniać te uważane momenty od momentów takiemi samemi zresztą literami oznaczanych, o których mówiliśmy przy elipsoidzie bezwładności i które tam występują jako współczynniki stałe, bo tam układ xyz był umocowany w ciele, a uważaliśmy różne kierunki osi wirowania. Uważane tu momenty bez-

władności są na ogół z czasem zmienne, ponieważ oryentacya ciała względem układu xyz się zmienia.

Najprostszą postać przyjmują te równania w wypadku, gdy elipsoida bezwładności jest kulą, bo wtedy $K_x = K_y = K_z = K$, a więc:

$$\frac{d}{dt}\left(K\frac{d\varphi}{dt}\right) = P$$

$$\frac{d}{dt}\left(K\frac{d\psi}{dt}\right) = Q$$

$$\frac{d}{dt}\left(K\frac{d\chi}{dt}\right) = R$$

[Specyalne zastosowania tych równań, a nawet poprzednich ogólniejszych, mieliśmy już nieraz przedtem. Zakładaliśmy tam z reguły, że ciało wiruje np. tylko koło osi z. Wtedy oczywiście moment bezwładności był K_z niezmienny w czasie, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = 0$ i równanie było:

$$K_z \frac{d^2\chi}{dt^2} = R$$

(analogon do $m\frac{d^2x}{dt^2} = X$)].

Dla naszych celów załóżmy, że elipsoida bezwładności jest kulą i że ciało wiruje początkowo koło osi y z prędkością $\frac{d\psi}{dt} = \omega$ w kierunku strzałki; natomiast $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\chi}{dt} = 0$. Nie powstaną tu żadne momenty

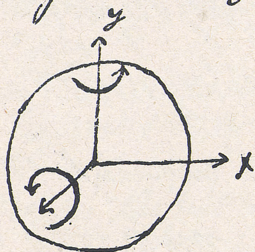


Fig 119.

dewiacyjne i przeto oś obrotu będzie pozostawać w tych warunkach niezmienioną, przechodząc przez środek masy ciała. Środek ten, ponieważ chcemy brać tylko pod uwagę ruchy wirowe, możemy przedstawić sobie w jakowyś sposób w przestrzeni utwierdzony. Więc stan początkowy ciała będzie scharakteryzowany równaniami:

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = P = 0$$

$$K\frac{d^2\psi}{dt^2} = Q -$$

$$K\frac{d^2\chi}{dt^2} = R = 0$$

Na to ciało tak wirujące wywrzemy pewien moment przez krótki czas τ, tak by ciało wirowało np. koło osi z. Drugi ten stan scharakteryzowany będzie równaniami:

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = P = 0$$

$$K\frac{d^2\psi}{dt^2} = Q$$

$$K\frac{d^2\chi}{dt} = R$$

Zapytamy się, jaka jest końcowa wartość tej operacji. Oto ciało nabierze pewnej prędkości wirowania koło osi z. Mamy

$$K\frac{d\chi}{dt} = \int R\,dt = R\tau$$

Stąd zatem: $\frac{d\chi}{dt} = \frac{R\tau}{K}$. Inne prędkości zostały niezmienione, a więc: $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = \omega$.

Gdy weźmiemy pod uwagę jakiś element tego ciała, to ruch jaki on wykonuje jest taki: porusza się on naprzód np. wzdłuż osi x, a potem zwróci się on nagle w kierunku innym zbliżając się np. ku osi z.

W pierwszem stadyum ruchu oś nie zmieniała swego kierunku. Skoro jednak wywarliśmy nacisk, to ponieważ nie jest ona umocowana, kierunek jej się zmieni. Można z łatwością oznaczyć kąt, jaki ta oś zamyka ze swym kierunkiem poprzednim. Odetnijmy

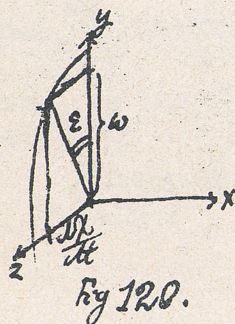


Fig 128.

na osi y prędkość ω, na osi z prędkość $\frac{dx}{dt} = \frac{R\tau}{K}$. Ponieważ $\frac{dy}{dt} = 0$, więc oś w tem nowem położeniu będzie leżała na płaszczyźnie yz. Jasną więc jest rzeczą, że będzie:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{dx}{dt}}{\omega} = \frac{\frac{R\tau}{K}}{\omega}$$

Chcieliśmy naszym naciskiem oś niejako odepchnąć a ona tymczasem zbliżyła się ku nam. Z ostatniego równania wynika też natychmiast, że im szybciej ciało wiruje koło osi y, tem mniej się wychyli przy wywarciu nacisku. Znane jest to popularnie pod nazwą:

zachowania osi wirowania. Istotnie przy tym samym nacisku na ciało a dobieranej prędkości ω, tyż może się stać dowolnie mały.

To cośmy powiedzieli dla elipsoidy bezwładności zdegenerowanej w kulę można zastosować ogólnie dla elipsoidy trójosiowej tylko tu trzeba rozważać trzy momenty. Jeszcze do tego wrócimy przy teoryi Poinsota i tam sobie bliżej z tego zdamy sprawę.

Równania Eulera. Dotychczas zdawaliśmy sobie sprawę z ruchu ciała sztywnego około stałego punktu na podstawie elipsoidy bezwładności. Wsposób geometryczny możemy na podstawie tego oznaczyć wielkość momentu bezwładności dla uważanej osi, ale przebiegu czasowego stąd wywnioskować nie można. Do tego służą równania Eulera.

W celu wyprowadzenia tych równań, uważajmy elipsoidę bezwładności o momentach głównych A, B, C, a prędkościach wirowania około osi

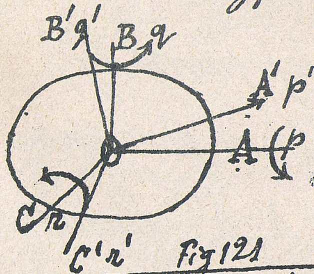


Fig 121

głównych $p = \frac{d\varphi}{dt}$, $q = \frac{d\psi}{dt}$, $r = \frac{d\chi}{dt}$. Po upływie bardzo krótkiego czasu t' niech moment A zmieni kierunek w A'. (wielkość bezwzględna A zostaje ta sama). Moment wycinkowy dla tej nowej pozycji będzie $A p'$. Na oś zatem dawną przypadnie z niego $A p' \cos\sphericalangle A'OA$.

Kierunek osi B przejdzie w tym samym czasie na B', a stąd na oś uważaną pierwotną przypadnie moment wycinkowy $B q' \cos\sphericalangle B'OA$

Analogicznie stanie się z momentem C. i na uważaną oś przypadnie $C r' \cos\sphericalangle C'OA$.

Stąd dostajemy na przyrost momentu wycinkowego w tym krótkim czasie t' w kierunku osi A:

$$A p' \cos A'OA + B q' \cos B'OA + C r' \cos C'OA - A p = P_a \, dt$$

Aby otrzymać równanie Eulera wystarczy ten wzór jeszcze nieco przekształcić. W tym celu zatoczmy koło punktu O kulę o promieniu $= 1$ i oznaczmy na niej punkty, w których osie kolejno przecinają jej powierzchnię, A, A'. Łuczek

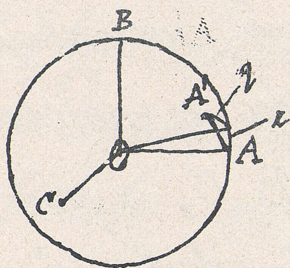


Fig 122.

AA' zakreślony w tym krótkim czasie t', oznaczać będzie prędkość, której składowe są r i q. Stąd $\sphericalangle A'OA = dt.\sqrt{q^2+r^2}$. Zatem przy założeniu, że kąty są bardzo małe, dostaniemy:

$$\cos A'OA = 1 - \frac{q^2+r^2}{2} dt^2.$$

Kąt BOA wynoszący $\frac{\pi}{2}$ przeszedł w tym krótkim czasie na kąt $B'OA$. Wzrósł on skutkiem obrotu koło osi z o łuk elementarny $r\,dt$. Zatem

$$\cos B'OA = \cos\left(\frac{\pi}{2} + r\,dt\right) = -\sin(r\,dt) = -r\,dt$$

Analogicznie $\sphericalangle COA$ przeszedł w tym krótkim czasie na $\sphericalangle C'OA$. Zmniejszył się on, ale to tylko skutkiem obrotu około osi y. Zatem

$$\cos C'OA = \cos\left(\frac{\pi}{2} - q\,dt\right) = \sin(q\,dt) = q\,dt.$$

Prędkości p, q, r przeszły w tymże czasie na $p' = p + dp$, $q' = q + dq$, $r' = r + dr$. Wzór tedy poprzedni po wstawieniu tych wartości przejdzie na:

$$A\left(p + \frac{dp}{dt}dt\right)\left(1 - \frac{q^2+r^2}{2}dt^2\right) - B\left(q + \frac{dq}{dt}dt\right)r\,dt +$$
$$+ C\left(r + \frac{dr}{dt}dt\right)q\,dt - Ap = \frac{P}{a}dt.$$

Wykonując naznaczone tu mnożenia i opuszczając wielkości wyższego rzędu w porównaniu z pierwszym

dostajemy równanie wypadkowe:

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = P_a$$

Gdyby w tem równaniu składnik drugi po lewej stronie odpadł, to nie mielibyśmy w niem nic innego, jak już nieraz używane przez nas równanie

$$K_x \frac{d^2\varphi}{dt^2} = P$$

zachodzące dla ruchu obrotowego wyłącznie koło osi x. Ponieważ jednak przez nas obecnie rozpatrywany ruch obrotowy nie odbywa się koło jednej specyalnej osi, lecz koło osi zmiennej takiej, żeby momenty bezwładności A, B, C zmieniały swe kierunki, a zachowały tylko wielkość bezwzględną taką samą, więc to jest uwzględnione przez składnik drugi.

Przez prostą zamianę znaków dostajemy dalsze równania:

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = Q_b$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = R_c$$

System ten równań jest 1^go^ rzędu ze względu na prędkości wirowania p, q, r i stąd dogodny do ca-

kowania. Aby dostać ruch, trzeba wprawdzie jeszcze raz całkować, ale owe całkowania są przynajmniej rozdzielone na dwa stopnie.

<u>Zastosowanie równań Eulera.</u> Zastosować możemy równania dopiero co wyprowadzone do zdania sobie sprawy z tego, jak się będzie zachowywać ciało samo sobie pozostawione, gdy na nie nie będą działać żadne siły zewnętrzne. Równania Eulera upraszczają się w tym razie, bo $P_a = Q_b = R_c = 0$. Będzie więc:

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = 0 \quad \Big| \; p \quad \Big| \; Ap$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = 0 \quad \Big| \; q \quad \Big| \; Bq$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = 0 \quad \Big| \; r \quad \Big| \; Cr$$

Mnożąc ten system równań przez: p, q, r dostajemy:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0,$$

którego całka jest

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{Const}.$$

Równanie to można było z góry przewidzieć; wyraża ono bowiem zachowanie energii kinetycznej. Już dawniej widzieliśmy, że energia kinetyczna ciała sztywnego wi-

rującego, o momencie bezwładności ze względu na daną oś K a o prędkości kątowej ω wyraża się: $L = \frac{1}{2}K\omega^2$. Otóż lewa strona wyraża właśnie podwójną energię kinetyczną i napiszemy zatem:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2E$$

Pomnóżmy teraz system równań Eulera przez Ap, Bq, Cr i dodajmy te równania znowu, to dostaniemy:

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0$$

Znowu całką tego równania, jak widzimy bezpośrednio jest:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2 \text{ (stała)}$$

Co to równanie oznacza? Iloczyny Ap, Bq, Cr są momentami wycinkowymi. Równanie więc to powiada, że wypadkowy moment wycinkowy jest stały, co do swej wartości bezwzględnej. Z tego, że równanie to jest równoważne następującemu:

$$(iAp + jBq + kCr)^2 = (\overline{G})^2$$

gdzie już wchodzą wektory, wnosimy, że również co do kierunku zostaje moment wycinkowy wypadkowy

niezmienny w czasie. Uzmysławiając to geometrycznie powiedzielibyśmy: suma wszystkich rzutów pól na jakąś płaszczyznę, jakie zakreślają wektory wszystkich punktów ciała, poprowadzone z dowolnego punktu jako początku (np. ze środka masy) jest wielkością niezmienną, o ile na ciało nie działają siły zewnętrzne; również wektor $\mathfrak{G}$ przedstawiający moment wycinkowy wypadkowy nie zmienia się w czasie. Również więc i wnioski z drugiego równania wypowiedziane były z góry do przewidzenia.

W dalszych już rozważaniach wyprowadzimy teorję Poinsota. Zauważymy, że oba rozważone wyżej równania:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2E$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$$

przedstawiają elipsoidy o wspólnym środku. Pierwsze z nich przedstawia elipsoidę bezwładności. Chcąc ją sprowadzić do formy:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

wystarczy całe tamto równanie podzielić przez 2E, skąd

wyniknie: $\xi = \frac{p}{\sqrt{2E}}$, ... czyli $p = \xi\sqrt{2E}$, $q = \eta\sqrt{2E}$, $r = \zeta\sqrt{2E}$.
Wypadkowa prędkość wirowania $\omega = \rho\sqrt{2E}$.

Obie uważane elipsoidy spełnione są równocześnie przez tesame spółrzędne p, q, r, a że mają różne wymiary więc muszą się przecinać. Łącznica wspólnego środka oba elipsoid z punktami krzywej przecięcia zakreślać będzie stożek, na którego pobocznicy pozostawać będzie stale oś wirowania ciała swobodna.

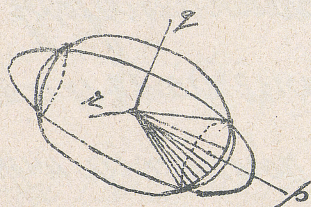


Fig. 123

Aby sprawę jeszcze jaśniej przedstawić podzielmy równanie elipsoidy bezwładności przez tamto drugie wyciągając zeń drugi pierwiastek. Będzie

$$p \cdot \frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} + q\frac{Bq}{\sqrt{\quad}} + r\frac{Cr}{\sqrt{\quad}} = \frac{2E}{G}$$

Jak można to równanie interpretować? Spółczynniki przy p, q, r mają kształt cosinusów nachylenia. Jeśli bowiem na osiach układu odetniemy sobie momenty wycinkowe Ap, Bq, Cr i złożymy je w wypadkowy

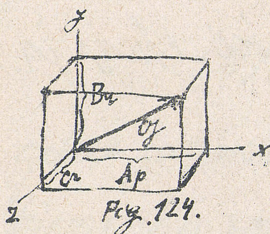


Fig. 124.

moment wycinkowy $\mathfrak{J}$, to mamy:

$$\frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} = \frac{Ap}{\mathfrak{J}} = \cos(\widehat{p\mathfrak{J}}), \quad \frac{Bq}{\sqrt{\ }} = \cos(\widehat{q\mathfrak{J}}), \quad \frac{Cr}{\sqrt{\ }} = \cos(\widehat{r\mathfrak{J}}).$$

Jeśli jednak ω oznacza nam wypadkową prędkość wirowania, to mamy też równości:

$$p = \omega\cos(\widehat{\omega p}), \quad q = \omega\cos(\widehat{\omega q}), \quad r = \omega\cos(\widehat{\omega r})$$

Wstawiając te oznaczenia w nasze równanie, sprowadzimy je do formy:

$$\omega\{\underbrace{\cos(\widehat{\omega p})\cos(\widehat{p\mathfrak{J}}) + \cos(\widehat{\omega q})\cos(\widehat{q\mathfrak{J}}) + \cos(\widehat{\omega r})\cos(\widehat{r\mathfrak{J}})}_{=\cos(\widehat{\omega\mathfrak{J}})}\} = Const$$

czyli

$$\omega \cdot \cos(\widehat{\omega\mathfrak{J}}) = Const.$$

Prędkość wirowania ω wyraża się, jak wiemy, w elipsoidzie bezwładności, $\omega = \rho\sqrt{2E}$ (gdzie $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$)

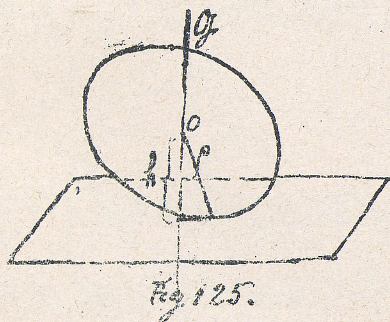


Fig. 125.

zatem

$$\rho\cos(\widehat{\omega\mathfrak{J}}) = \frac{const}{\sqrt{2E}} = Const;$$

że zaś kierunek $\mathfrak{J}$ jest niezmienny w czasie, więc to równanie powiada, że rzut odcinka ρ na kierunek $\mathfrak{J}$, nazwijmy ten rzut h, jest wielkością stałą: $h = const.$

ϱ może zmieniać swoje wartości, ale zmienia je zawsze tak, iż punkt jego końcowy leży zawsze na płaszczyźnie, normalnej do $O\mathcal{J}$ w niezmiennym odstępie h od środka O się znajdującej. Równanie takiej płaszczyzny jest:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - h = 0$$

gdzie h ma znaczenie powyższe, zaś α, β, γ oznaczają kąty zawarte między osiami a kierunkiem h. Lecz osie mają u nas kierunki osi głównych elipsoidy, zatem równanie tej płaszczyzny jest:

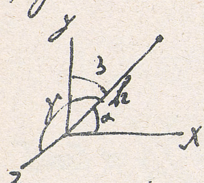


Fig 126.

$$x\frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} + y\frac{Bq}{\sqrt{\quad}} + z\frac{Cr}{\sqrt{\quad}} - h = 0$$

Powiadamy, że równanie to jest zarazem równaniem stycznej płaszczyzny do elipsoidy bezwładności. Jak się o tem przekonać? Oto załóżmy, że zachodzi równanie elipsoidy:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2E$$

i znajdziemy równanie płaszczyzny stycznej do tej elipsoidy. Jeśli to równanie będzie identyczne z równaniem płaszczyzny poprzedniej, to twierdzenie nasze będzie udowodnione. Lecz równanie stycznej płaszczyzny do elipsoidy z punktem styczności p, q, r

przedstawi się:

$$Apx + Bqy + Crz = 2E,$$

gdzie x, y, z oznaczają współrzędne bieżące. Dzieląc to równanie obustronnie przez $\varrho = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$, dostajemy:

$$x\frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} + y\frac{Bq}{\sqrt{}} + z\frac{Cr}{\sqrt{}} = \frac{2E}{\varrho}.$$

równanie identyczne z poprzedniem. Zatem istotnie elipsoida bezwładności dotyka się owej niezmiennej płaszczyzny w przestrzeni. Ponieważ ϱ tj. owa łącznica środka elipsoidy z punktem styczności jest co chwila inna, więc elipsoida toczy się po płaszczyźnie niezmiennej (nie ślizga się). Prędkość więc w takim ruchu, w kierunku stycznym równa się zeru. Skutkiem owego toczenia się elipsoidy zakreślają kolejne punkty styczności drogi: na elipsoidzie, którą nazywamy polhodyą, i na płaszczyźnie stycznej, którą

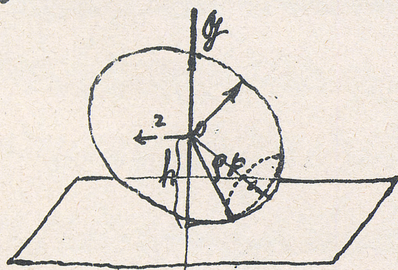


Fig. 127.

znowu nazywamy her-(ser-)polhodyą. Cały tedy ruch ciała sobie samemu pozostawionego bez dzia-

łania sił zewnętrznych odbywa się tak, że stożek polhodyowy odwija się na stożku herpolhodyowym.

Na podstawie tego można już sobie zdać sprawę ze stałości osi obrotu. Można tu rozróżnić trzy wypadki, zależnie od tego czy ruch ciała przed pozostawieniem swobodnem odbywał się koło osi w bliskości osi największej, najmniejszej, średniej pomiędzy trzema osiami głównemi elipsoidy bezwładności. Już same rysunki sprawę wyjaśniają. Trzeba zwrócić tylko na

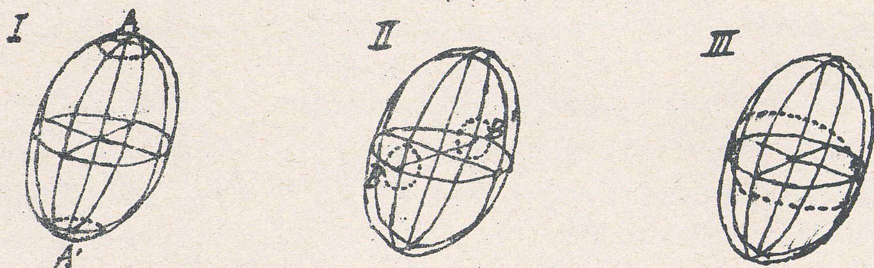


Fig 128.

to uwagę, że każdorazowa oś chwilowa przechodzi przez punkty styczności płaszczyzny, która stale od środka elipsoidy zostaje w odległości h. Gdy więc oś chwilowa ma przechodzić w bliskości osi największej (I)., to odległość h będzie utrzymana tylko przez to że elipsoida toczyć się będzie po płaszczyźnie stycznej swemi punktami blisko A, (A') znajdującymi się. Każdy

punkt dalej się znajdujący na elipsoidzie od A, (A'), niż punkt przez który przechodziła oś wirowania w pierwszej chwili, powodowałby zmianę swego h. Takszmo każdy bliżej. Ciało więc będzie tak wirować, że kąt, jaki każdorazowa oś zamykać będzie z kierunkiem Oj będzie mały. Polhodya tworzyć będzie krzywą zamkniętą o nieznacznej długości, a również herpolhodya nie będzie zataczać wielkich kręgów na płaszczyźnie stycznej. Podobnie się rzecz będzie mieć, gdy oś chwilowa znajduje się w bliskości osi najmniejszej (II). Inaczej atoli już będzie, gdy oś chwilowa zamyka mały kąt w pierwszej chwili z osią średnią (III). Pomyślmy bowiem sobie cały pęk płaszczyzn przechodzących przez oś największą. Utworzą one z powierzchnią elipsoidy przekroje. Na każdym z nich można znaleźć punkt, iż płaszczyzna styczna przezeń przechodząc będzie o h odległa od środka elipsoidy i wszystkie te punkty tworzą linię ciągłą. Otóż teraz będzie polhodya otaczać całą elipsoidę i oś będzie już teraz znacznie odchylać się. Jeśli posbuży-

my się analogią do przypadków równowagi, to powiemy, że dwa pierwsze wypadki zachowania się chwilowej osi obrotu odpowiadają równowadze stałej, zaś trzeci równowadze niestałej.

Pozostaje nam jeszcze zdać sobie sprawę z zależności uważanego ruchu obrotowego (koło osi swobodnej) od czasu. Do tego służą równania Eulera. W wypadku jednak całkiem ogólnym dostalibyśmy całki eliptyczne; ograniczymy się tedy do wypadku mniej ogólnego, ważnego jednak w praktyce, przyjmując symetryę obrotową tj. założymy, że momenty bezwładności ze względu na dwie osie główne są sobie równe:

$$B = C$$

Pod tym warunkiem i tym oczywiście, który wcałem rozważaniu tego ustępu czynimy, że na ciało wirujące nie działają momenty zewnętrzne, równania Eulera przyjmują postać:

$$A \frac{dp}{dt} = 0$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A-B) p r = 0 \qquad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$B \frac{dr}{dt} + (B-A) q p = 0$$

Stąd $p = Const$ t.j. prędkość wirowania koło osi, różniącej się od dwu pozostałych (sobie równych) jest niezmienna w czasie.

Upochadniając drugie równanie względem czasu dostajemy:

$$B \frac{d^2q}{dt^2} + (A - B) \frac{dr}{dt} = 0$$

a wyrażając $\frac{dr}{dt}$ z równania trzeciego, otrzymujemy:

$$B \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{(B-A)^2}{B} p^2 q$$

równanie różniczkowe drugiego rzędu, podobne całkiem do tego jakie już niejednokrotnie wyprowadziliśmy dla wahadła. Wiemy stąd już natychmiast rozwiązanie: q wyrazi się jako funkcya peryodyczna czasu:

$$q = q_0 \sin \alpha t$$

spełniająca się pod warunkiem, że $\alpha^2 = \left(\frac{B-A}{-B}\right)^2 p^2$. Okres zmienności prędkości q wyrazi się: $T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{B}{B-A}$.

Taksamo będzie dla prędkości r. Znowu wyrazi się ona jako funkcya peryodyczna czasu i będzie posiadać oczywiście okres taki sam.

Powiemy więc, jeśli elipsoida bezwładności jest obrotową

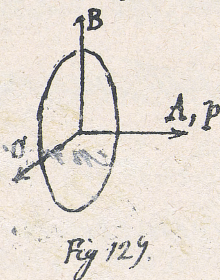


Fig 129.

spłaszczoną np., (wtedy bowiem będzie zachodzić właśnie wypadek $B=C$; $A \neq B$), to ruch obrotowy tak się będzie odbywał, że wystąpią pewne ruchy peryodyczne, a mianowicie chwilowa oś wypadkowa zakreślać będzie stożek kołowy. Polhodya będzie kołem. Okres tego ruchu:

$$T = \frac{2\pi}{p} \frac{B}{B-A}$$

będzie tem dłuższy im stała prędkość obrotowa p jest mniejsza i im różnica momentów bezwładności: $B-A$ jest mniejsza.

Przeprowadzając odnośne rachunki dla ziemi, dostajemy na stałą prędkość obrotową: $p = \frac{2\pi}{24.60.60}$ (w miarach drogi i czasu). Momenty bezwładności A i B dadzą się też bez większych trudności obliczyć. Tą drogą dostał Euler: $T = 303$ dni. Że oś chwilowa



Fig 129.

obrotu ziemi zmienia swoje położenie z czasem to stwierdzono przez obserwacye. Zmiany położenia chwilowej osi

obrotu obserwuje się najpewniej przez równoczesne pomiary szerokości astronomicznej z polaris z dwu przeciwnych miejsc na ziemi. Można potem kolejne pozycje osi chwilowej graficznie zanotować tworząc sobie odpowiednią mapę okolic podbiegunowych i dostanie się w ten sposób polhodyę. Z tych pomiarów przekonano się jednak, że T tj. ów czas perturbacyi Eulerowskich nie wynosi 303 dni ale 420 dni. (Newcomb, Rudzki). Różnica ta pochodzi stąd, że rachunek Eulera był przeprowadzony dla ciała sztywnego, tymczas trzeba uwzględnić, że ziemia nie jest jednorodną i że posiada pewną sprężystość. Co do wielkości wychyleń to są one bardzo małe około 0'15" tj. odstępy na ziemi wynoszą kilka metrów tak, że dopiero precyzyjne pomiary zdołały je pochwycić. Polhodya z tych pomiarów otrzymana nie jest kołem ani wogóle jakąś krzywą regularną. Jest to krzywa dziwacznie poplątana. (Z większej liczby obserwacyj może da się zauważyć, że krzywa ta skupia się koło obwodu koła). Przyczyny tego nie są na razie dość wyjaśnione, bo badania są utrudnione. Zachodzę tu zda-

je się wpływy atmosferyczne. Pokrycie np. Syberyi warstwą śniegu spowodowałoby już dosyć znaczne wychylenie.

Powyższe rozważania dotyczyły ruchu obrotowego ciała sztywnego nie podlegającego momentom sił. Siły translatoryczne mogą istnieć. Nie wpływają one, jak wiemy na ruch obrotowy. Teraz przejdziemy do rozpatrzenia ruchu obrotowego w którym atoli momenty sił zewnętrznych działają.

Ruch krążka.

Ruch ciała sztywnego jest określony, jak wiemy, w zupełności sześcioma równaniami analitycznemi niezależnemi. Powiadamy stąd, że ciało posiada sześć stopni swobody ruchu. Tę ilość możemy w dowolny sposób ograniczać. Jeśli ułożymy tak warunki, że ciało sztywne musi pozostawać na jakiejś powierzchni, to posiadać ono będzie już tylko pięć stopni swobody ruchu. Jeśli ciało musi się poruszać po pewnej linii, to posiada ono już tylko

cztery, a jeśli ma pozostawać w pewnem miejscu, to już tylko trzy stopnie swobody ruchu tj może się dowolnie jeszcze obracać. Te ogólne uwagi możemy stosować do


Fig 130.

krążka. Gdy krążek puścimy wolno na stół np. to dajemy mu pięć stopni swobody ruchu, gdy zmusimy go do poruszania się wzdłuż jakiejś nitki lub krawędzi to będzie on miał cztery stopnie swobody ruchu, gdy wreszcie włożymy go jednym końcem do łożyska pewnego to zostanie mu tylko trzy stopnie swobody ruchu tj. będzie mógł się kręcić około osi swobodnej. Poprzednie ruchy posuwiste, rozpatrywane bliżej przy ruchu punktu materyalnego, nie interesują nas tu. Natomiast zwrócimy uwagę na ruchy obrotowe, jakie krążek odbywa pod wpływem siły ciężkości. By można rzecz łatwiej ująć matematycznie, idealizujemy nasz krążek tak, że ma on budowę zupełnie symetryczną i pomijamy wszelkie tarcie o łożysko opór ośrodka i tp. coby sprawę mogło komplikować. Jednem słowem: krążek nasz jest sztywny, jednym

swoim punktem stale utwierdzony w łożysku, w czasie obrotu działa nań tylko siła ciężkości. Elipsoida bezwładności będzie obrotową i załóżmy, że równe momenty bezwładności są A i B, trzeci C jest różny od tych dwu. Odpowiednie prędkości naznaczymy p, q, r.

~~Aby badać~~ teraz ruch krążka, możnaby się powołać na równanie Eulera, które teraz przyjmą postać taką:

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = P$$

$$A\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = Q$$

$$C\frac{dr}{dt} = R$$

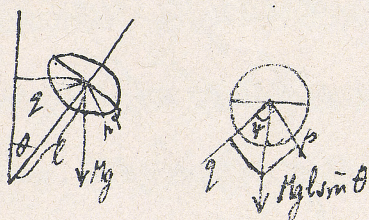


Fig 136

Przyczem momenty siły P, Q, R łatwo wyznaczyć jako składowe momentu wypadkowego:

$$Mgl\sin\theta.$$

Oś momentu tego (ciężkości) jest prostopadła do osi krążka. Stąd mamy natychmiast:

$$P = Mgl\sin\theta\sin\psi, \quad Q = Mgl\sin\theta\cos\psi, \quad R = Mgl\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Zatem $\frac{dr}{dt} = 0$ czyli prędkość $r = Const$. Prędkości zaś p i q

ni są stałe. Składają się one wszystkie razem według prawa dodawania wektorów.

Wielkości p, q, r dające nam wyobrażenie o ruchu krążka są odniesione do elipsoidy bezwładności tegoż krążka nie określają nam jednak oryentacyi krążka w przestrzeni. Jeśli więc nam chodzi o ruch krążka w przestrzeni, musimy p, q, r wyrazić jako funkcye pełonych spółrzędnych przestrzennych.

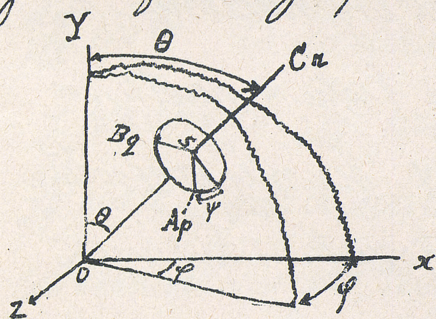


Fig 131.

W tym celu wyobraźmy sobie, że koniec osi krążka umieszczony jest w początku układu, a przez oś krążka i oś y poprowadźmy płaszczyznę. Kąt, jaki ta płaszczyzna zamyka z płaszczyzną (xy) naznaczmy literą φ, kąt jaki oś wirowania krążka tworzy z osią y literą θ, wreszcie kąt jaki tworzy oś A (więc oś względem której moment bezwładności jest A) z płaszczyzną poprowadzoną przez oś wirowania krążka literą ψ.

Aby teraz wyrazić:

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix}\right\} \text{jako } fc\left(\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)$$

wystarczy zauważyć że można uważać p, q, r jako wektory wypadkowe składowych części wektorów $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ w odnośnych kierunkach. Trzeba tedy $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ porozkładać w pewne kierunki i tak otrzymane wektory składać potem w odnośne kierunki p, q, r.

Wmyśl tych ogólnych uwag dla wyznaczenia r będziemy tak rozumować: Zmiana kąta φ nastąpić może tylko skutkiem obrotu koło osi y. Na niej więc odetniemy wektor prędkości $\frac{d\varphi}{dt}$; z prędkości tej w kierunek prędkości r przypadnie $\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta$.

Zmiana kąta θ nastąpić może tylko skutkiem obrotu koło osi z, ruchomej, stale prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez oś wirowania krążka. Na tej więc osi z odetniemy prędkość $\frac{d\theta}{dt}$; w kierunku r przypadnie z niej wielkość $\frac{d\theta}{dt}\cos\frac{\pi}{2} = 0$, ponieważ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Wreszcie ze zmian kąta ψ przypadnie w kierunek

r oczywiście prędkość: $\frac{d\psi}{dt}\cos\theta$. Utworzywszy sumę wszystkich tych wielkości, jakie w kierunku r przypadną dostajemy pierwszy wzór:

$$(1) \qquad r = \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta + \frac{d\psi}{dt}$$

Wcelu wyrażenia p rozumujemy w sposób podobny: Z prędkości: $\frac{d\psi}{dt}$, którą wyobrażamy sobie jako odcinek na osi wirowania, przypadnie w kierunek r wielkość $\frac{d\psi}{dt}\cos\frac{\pi}{2}$, bo kierunek p jest prostopadły do osi wirowania. Z prędkości $\frac{d\varphi}{dt}$ przypadnie w kierunek p wielkość: $\frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha$, gdzie atoli kąt $\alpha = \measuredangle py$ trzeba jeszcze na podstawie wzorów trygonometryi sferycznej przez znane wielkości wyrazić. Wtym celu pomyślmy sobie oś y

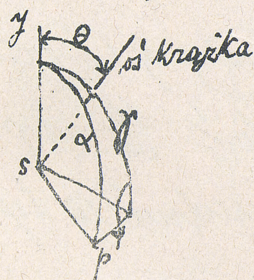


Fig 132.

przesuniętą równolegle do swej pierwotnej pozycji do punktu s, i pomyślmy sobie kulę zatoczoną promieniem 1 koło s jako środka. Kąt α jest wyrażony przez łuk α koła wielkiego poprowadzonego przez kierunki p i y. Dostajemy więc trójkąt sferyczny o bokach α, γ, ψ, prostokąt

ny, bo płaszczyzna poprowadzona przez oś krążka jest prostopadła do samego krążka. Znany jest wzór w trygonometryi sferycznej: $\cos\alpha = \cos\gamma\cos\psi$. Lecz widocznie $\gamma = \frac{\pi}{2}+\theta$, zatem $\cos\alpha = -\sin\theta\cos\psi$. Na kierunek więc p przypadnie z $\frac{d\varphi}{dt}$ wielkość: $-\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\psi$.

Z prędkości: $\frac{d\theta}{dt}$, odciętej na osi z przypadnie w kierunek p, jak to natychmiast widać, skoro tylko pomyślimy sobie oś z przesuniętą do płaszczyzny krążka, wartość: $\frac{d\theta}{dt}\sin\psi$. Utworzywszy sumę wszystkich prędkości, które w kierunku p przypadną dostajemy drugi wzór:


Fig 133.

$$(2) \qquad p = \frac{d\theta}{dt}\sin\psi - \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\psi$$

Jeszcze pozostaje nam do wyrachowania q: Z prędkości $\frac{d\theta}{dt}$ przypadnie w kierunek q, wartość $\frac{d\theta}{dt}\cos\psi$.

Z prędkości $\frac{d\psi}{dt}$ przypadnie w tymże kierunku: $\frac{d\psi}{dt}\cos\frac{\pi}{2}=0$


Fig 134.

Z prędkości $\frac{d\varphi}{dt}$, odciętej więc na osi y przypadnie w tymże kierunku wielkość $\frac{d\varphi}{dt}\cos\beta$, gdzie $\cos\beta = \cos\angle(y\,q)$ wyznaczymy

znowu ze wzorów trygonometryi sferycznej, biorąc pod uwagę trójkąt prostokątny, zamknięty łukami wielkich kół: β, $\frac{\pi}{2}+\theta$, $\frac{\pi}{2}+\psi$. Będzie:

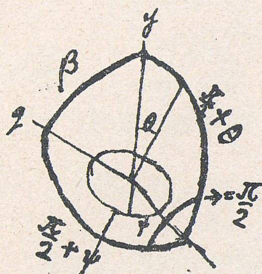


Fig 135

$$\cos\beta = \sin\theta \sin\psi,$$

czyli w kierunku q przypadnie z $\frac{d\psi}{dt}$ wielkość: $\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\psi$. Sumując znowu wynalezione trzy prędkości w kierunku q dostajemy trzeci wzór:

$$(3) \qquad q = \frac{d\theta}{dt}\cos\psi + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\sin\psi.$$

Wzory (1), (2), (3) są to wzory Eulera. Mając owe wzory transformacyjne i wyrażając momenty sił; P i Q:

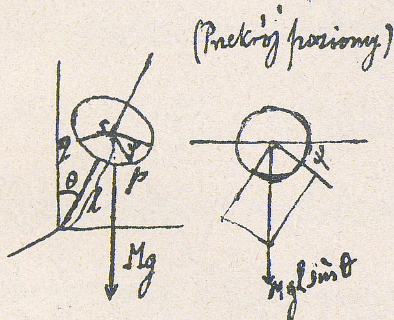


Fig 136.

$$P = Mgl\sin\theta\sin\psi$$

$$Q = Mgl\sin\theta\cos\psi$$

możemy to wszystko wstawić w równania Eulera i wykonać całkowanie. Prostszy atoli jest sposób oprzeć się na znanych nam dwu zasadach, ważnych dla ciała sztywnego, zasadzie zachowania energii mechanicznej i zasadzie zachowania mo-

mentów wycinkowych. Zasady te przy założeniach, pod którymi ruch krążka rozpatrujemy, są oczywiście ważne.

Zasada zachowania energii daje nam równanie:

$$E + Mgl\cos\theta = Const$$

gdzie energia kinetyczna $= E = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2} = \frac{A(p^2+q^2)}{2} + \frac{Cr_0^2}{2}$, gdzie r_0 oznacza, jak to powiedzieliśmy, stałą prędkość wirowania. Stąd

$$A(p^2+q^2) + Cr_0^2 + 2Mgl\cos\theta = Const$$

Według wzorów transformacyjnych jest:

$$p^2+q^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta$$

a więc równanie poprzednie przechodzi na inne:

$$A\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta\right] + Cr_0^2 + 2Mgl\cos\theta = Const.$$

Kąt θ jest zmienny i możemy co do niego zrobić takie założenie, aby dla pewnego $\theta = \theta_0$, zachodziła równość:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta = 0 \quad \left[\text{to znaczy } \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0\right]$$

stąd:

$$Cr_0^2 + 2Mgl\cos\theta_0 = Const$$

Równość taka definiuje nam właśnie θ_0. Odejmując

tę równość ostatnią od równania poprzedniego, dostajemy równanie zachowania energii w formie:

$$\text{(I)} \quad A\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta\right] + 2Mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) = 0$$

Teraz wyciągniemy jeszcze wnioski z zasady zachowania momentów wycinkowych. Koło osi y nie działają żadne momenty sił, zatem moment wycinkowy rzucony na płaszczyznę poziomą (xz) jest, w myśl ogólnych twierdzeń, wielkością stałą. Momenty składowe wycinkowe są, jak wiemy, Ap, Bq, Cr. Według więc powiedzianego twierdzenia suma rzutów:

$$Ap\cos\alpha + Bq\cos\beta + Cr\cos\theta = Const,$$

gdzie $\cos\alpha$, $\cos\beta$ mają znaczenia poprzód wyrachowane; wstawiając takowe i zważając, że $A = B$, mamy:

$$A[-p\sin\theta\cos\varphi + q\sin\theta\sin\psi] + Cr\cos\theta = Const$$

Zwracając się teraz do wzorów transformacyjnych na p i q i wstawiając te wartości, dostajemy:

$$\text{(II)} \quad A\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\sin^2\theta + Cr_0\cos\theta = Const$$

Dla oznaczenia stałej Const zauważymy, że jak przedtem, dla kąta θ_0 mamy $\frac{d\theta}{dt}=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$ więc

$$C r_0 \cos\theta_0 = Const.$$

Odejmując teraz to równanie od (II), dostaniemy postać nieco wygodniejszą:

$$(\text{II}^*) \qquad A\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta + C r_0(\cos\theta-\cos\theta_0)=0$$

Czyniąc teraz założenie, że nachylenie osi krążka mało się różni od wartości θ_0, to znaczy że $\theta-\theta_0=\alpha$ wielkości bardzo małej, mamy:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}.$$

$$\cos\theta-\cos\theta_0=-2\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}=-2\alpha\sin\theta_0.$$

Są to uproszczenia jakie się zwykło czynić, gdy wielkości jakieś różnią się od siebie mniej niż tego dokładność naszego rachunku wymaga.

Wstawiając wartości na $\frac{d\theta}{dt}$ i $\cos\theta-\cos\theta_0$ do równań (I) i (II*) i zastępując w pozostałych składnikach równań (I) i (II*) kąt θ przez θ_0 bardzo

mało się różniący od θ_0, dostaniemy uproszczone równania:

$$\text{III.}\begin{cases} a) & A\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta_0\right] - 4Mgl\alpha\sin\theta_0 = 0 \\ b) & A\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta_0 - 2Cr_0\alpha\sin\theta_0 = 0 \end{cases}$$

Rugując z tych dwu równań $\frac{d\varphi}{dt}$, dostaniemy równanie różniczkowe ze względu na zmienną α:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{4C^2r_0^2}{A^2}\alpha^2 - \frac{4Mgl\sin\theta_0}{A}\alpha = 0$$

To równanie da się scałkować. Sprowadzamy je do formy:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{4Mgl\sin\theta_0}{A}\alpha - \frac{4C^2r_0^2}{A^2}\alpha^2}} = dt$$

tj do formy
$$\frac{d\alpha}{\sqrt{m\alpha - n\alpha^2}} = dt$$

Lewa strona tego równania da się przedstawić tak:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{m\alpha - n\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{m}{n}\alpha - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{m^2}{4n^2} - \underbrace{\left(\frac{m}{2n} - \alpha\right)^2}_{z^2}}} =$$

$$= \mp\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{dz}{\sqrt{\frac{m^2}{4n^2} - z^2}} = \mp\frac{2\sqrt{n}}{m}\frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{4n^2}{m^2}z^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{d\left(\frac{2nz}{m}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2nz}{m}\right)^2}}$$

$$\int\frac{d\alpha}{\sqrt{m\alpha-n\alpha^2}}=\mp\frac{1}{\sqrt{n}}\int\frac{d\left(\frac{2nz}{m}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2nz}{m}\right)^2}}=\mp\frac{1}{\sqrt{n}}\,\text{arc sin}\,\frac{2n}{m}z=$$

$$=\mp\frac{1}{\sqrt{n}}\,\text{arc sin}\,\frac{2n}{m}\left[\pm\left(\frac{m}{2n}-\alpha\right)\right]=\mp\frac{1}{\sqrt{n}}\,\text{arc sin}\left[\pm\left(1-\frac{2n\alpha}{m}\right)\right]=t+\text{Const.}$$

Przywracając m i n ich znaczenia mamy:

$$\frac{A}{2Cr_0}\,\text{arc sin}\left(1-\frac{2C^2r_0^2}{AMgl\sin\theta_0}\cdot\alpha\right)=t+\text{Const}$$

$$\text{arc sin}\left(1-\frac{2C^2r_0^2}{AMgl\sin\theta_0}\alpha\right)=\frac{2Cr_0}{A}t+\varepsilon$$

$$1-\frac{2C^2r_0^2}{AMgl\sin\theta_0}\cdot\alpha=\sin\left(\frac{2Cr_0}{A}t+\varepsilon\right).$$

Stąd wreszcie

$$\alpha=\theta-\theta_0=\left[1-\sin\left(\frac{2Cr_0}{A}t+\varepsilon\right)\right]\frac{AMgl\sin\theta_0}{2C^2r_0^2}$$

czyli

$$\theta=\underbrace{\theta_0+\frac{AMgl\sin\theta_0}{2C^2r_0^2}}-\underbrace{\frac{AMgl\sin\theta_0}{2C^2r_0^2}\sin\left(\frac{2Cr_0}{A}t+\varepsilon\right)}$$

Widzimy, że prawa strona tej równości składa się z dwu części: pierwsza jest wielkością stałą, nazwijmy ją literą Θ_0, druga natomiast zawiera funkcję periodyczną sin zależną od czasu. Krótko zapiszemy ten rezultat:

$$\theta = \Theta_0 - \frac{AMgl\sin\theta_0}{2C^2r_0^2}\sin\left(\frac{2Cr_0}{A}t + \varepsilon\right).$$

Wstawiając teraz wartość wynalezioną na α w drugie z równań, z których wyszliśmy (III b.), dostaniemy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2Cr_0}{A\sin\theta_0}\cdot\frac{AMgl\sin\theta_0}{2C^2r_0^2}\left[1 - \sin\left(\frac{2Cr_0}{A}t + \varepsilon\right)\right]$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgl}{Cr_0}\left[1 - \sin\left(\frac{2Cr_0}{A}t + \varepsilon\right)\right]$$

skąd:

$$\varphi = Const + \frac{Mgl}{Cr_0}\left[t + \frac{A}{2Cr_0}\cos\left(\frac{2Cr_0}{A}t + \varepsilon\right)\right]$$

$$\varphi = Const + \frac{Mgl}{Cr_0}t + \frac{AMgl}{2C^2r_0^2}\cos\left(\frac{2Cr_0}{A}t + \varepsilon\right)$$

Znowu rezultat ten krócej zapiszemy:

$$\varphi = \Phi_0 + \frac{AMgl}{2C^2r_0^2}\cos\left(\frac{2Cr_0}{A}t + \varepsilon\right),$$

gdzie Φ_0 jest funkcyą liniową argumentu t, drugi składnik natomiast zawiera peryodyczną funkcyę cos. Wprowadźmy jeszcze skrócenia na wielkości stałe: $\frac{AMgl\sin\theta_0}{2C^2r_0^2} = \vartheta_0$, $\frac{AMgl}{2C^2r_0^2} = \varphi_0$, $\frac{2Cr_0}{A} = h$, to ruch krążka pod powyższemi za-

łożeniami przedstawimy dwoma równaniami:

$$\varphi = \Phi \;\Big|\; + \varphi_0 \cos(ht+\varepsilon)$$

$$\theta = \Theta_0 \;\Big|\; - \vartheta_0 \sin(ht+\varepsilon).$$

Prawe strony tych równań rozpadają się na dwie części. Składniki Φ i Θ_0 określają ruch jednostajny; według nich oś krążka zakreśla stożek. Ruch ten nazywamy precessyą. Kąt Φ rośnie proporcyonalnie do czasu. Koło ruchu precessyjnego superponowany jest drugi ruch, okresowy. Nazywamy go nutacyą. Dobierając za początek liczenia tę chwilę, dla której $\varepsilon=0$, otrzymujemy na okres nutacyi: $T_n = \frac{2\pi}{h}$, czyli

$$T_n = \frac{\pi A}{C r_0}$$

Okres precessyi uwarunkowany jest równością $\frac{Mgl}{Cr_0} T_p = 2\pi$. Stąd okres precessyi:

$$T_p = \frac{2\pi C r_0}{Mgl}$$

Ruch wirującego krążka można łatwo interpretować geometrycznie. W tym celu wykreślmy płasz-

czyznę normalną do osi krążka [w pozycyi Φ, Θ_0], w końcu tej osi i oznaczmy odchylenie φ, θ od punktu Φ, Θ_0 zapomocą spółrzędnych ξ, η, tak że:

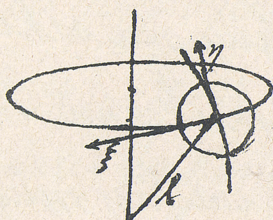


Fig.

$$\eta = l(\theta - \Theta_0)$$
$$\xi = l \sin \Theta_0 (\varphi - \Phi)$$

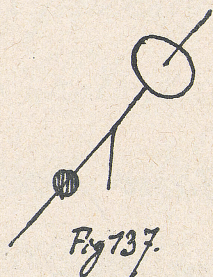
Wtedy z owych równań wynika, że

$$\xi^2 + \eta^2 = [\vartheta_0 l]^2 = \left[\frac{A M g l^2 \sin \vartheta_0}{2 C^2 r_0^2}\right]^2.$$

Zatem oś krążka zakreśla koło naokoło bieguna poruszającego się $[\Phi, \Theta_0]$. Koło to będzie miało tem większe rozmiary im ϑ_0 jest większe. Zwracając się do znaczenia ϑ_0, widzimy, że ono tem większe im prędkość wirowania początkowa r_0 jest mniejsza. Stąd pochodzi znane zjawisko, że gdy puścimy bączka na stół, to z początku nutacyi prawie niema. Dopiero w miarę, jak skutkiem tarcia zmniejsza się prędkość wirowania r_0, staje się nutacya coraz widoczniejsza. Wzór na φ_0 daje nam też

praktyczną wskazówkę, jak można nutacyę zmniejszyć (niezależnie od prędkości wirowania r_0). Oto wystarczy uczynić moment bezwładności ze względu na oś krążka wirującego C jak największym. Uskutecznia się to zaś przez nagromadzenie możliwie wielkiej masy na obwodzie krążka.

Doświadczalnie można ruchy te studyować na krążku Bohnenbergera w zawieszeniu Cardanowskiem.


Fig 137.

Zapomocą ciężarka przesuwalnego można dobierać różne momenty, któreby pod wpływem siły ciężkości działały lub też, by na krążek wirujący żaden moment nie działał.

Zjawisko precessyi i nutacyi zachodzi na wielką skalę w ruchu ziemi. Oś ziemi jest nachylona nieco do ekliptyki, że zaś najwięcej masy ziemi jest na równiku, więc w pewnych pozycyach w czasie swego obiegu koło słońca ustawia się ziemia niesymetrycznie do płaszczyzny, którąbyśmy sobie pomyśleli prze-

chodzącą przez środek ziemi prostopadle do łącznicy środków ziemi i Słońca. Pozycye te powtorzą się oczywiście najwybitniej dwa razy w roku (w lecie i w zimie). Prócz tej niesymetryczności ustawienia się ziemi do Słońca zachodzi jeszcze druga niesymetryczność ustawienia się ziemi względem księżyca. Ta ostatnia ma nawet skutkiem bliskości ziemi i księżyca większy wpływ na wspomniane zjawiska. Otóż skutkiem tych niesymetryczności powstaje na mocy prawa grawitacyi moment siły starający się ustawić oś ziemi prostopadle do ekliptyki. Następstwem tego jest ruch precessyi i nutacyi ziemi.

Według obserwacyj z czasów historycznych, przesunięcia się ziemi ze znaku barana do znaku ryb, obliczono jako okres precessyi $T_p = 25800$ lat; z nachylenia zaś osi ziemskiej 23·5° do ekliptyki obliczono jako okres nutacyi ziemskiej $T_n = 18{\cdot}6$ lat. Amplituda nutacyi wynosi 9·24″. Jest to wielkość dająca się obecnie łatwo zaobserwować,

Zjawisko precessyi i nutacyi ma też znaczenie dla geofizyków. Na mocy tych zjawisk starał się Hopkinson dowieść, że ziemia zachowuje się jak ciało sztywne. Wywody te uważa się obecnie za błędne. Były to atoli pierwsze próby w celu orzeczenia konstrukcyi ziemi. Obecnie dowodzi się sztywności ziemi przypływami i odpływami morza, i badaniami seismograficznemi.

My przez rozpatrywanie ruchu krążka mieliśmy sposobność zastosować równania Eulera. Rozpatrywaliśmy mianowicie wypadek, gdy zachodzi dla ciała wirującego symetrya obrotowa. Rozpatrywanie ogólnego wypadku, gdy wszystkie trzy momenty główne bezwładności są różne jest już rzeczą daleko trudniejszą. Nie można wtedy równań różniczkowych ruchu całkować, tylko w pewnych specyalnych wypadkach. Jeden z takich wypadków podała P. Zofia Kowalewska. Teoryę krążka przedstawili w obszernem dziele Klein i Sommerfeld.*)

Na tem zakończymy mechanikę ciał sztywnych, a w dalszym ciągu będziemy się zajmować ogólnemi zasadami, a więc wyprowadzimy równania

*) Theorie des Kreisels (Teubner).

Lagrange'a i zasadę Hamiltona.

Równania Lagrange'a.

Widzieliśmy, że mechanikę ciał sztywnych można ująć w dwa twierdzenia: o zachowaniu środka masy i momentów wycinkowych. Pierwsza zasada daje trzy równania na ruch postępowy, druga znowu trzy równania na ruch obrotowy. Ponieważ ciało sztywne ma sześć stopni swobody ruchu, więc istotnie obie zasady wystarczają do opisania jego ruchu.

Jeśli mamy do czynienia ze systemem nieswobodnym, gdzie zachodzi kilka stopni swobody, wtedy najlepiej jest użyć zasady d'Alemberta:

$$\sum_k \left[\left(m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - X_k\right)\delta x_k + \left(m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - Y_k\right)\delta y_k + \left(m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - Z_k\right)\delta z_k\right] = 0$$

gdzie δx_k, δy_k δz_k oznaczają przesunięcia przygotowane, a więc zgodne z warunkami ruchu. Temi przesunięciami wyraża się zależność jednych części

składowych od drugich. Zasada d'Alemberta daje bezpośrednio równania ruchu.

Prócz zasady d'Alemberta można podać inne. Najpraktyczniej okazuje się używać równań Lagrange'a w ogólnych spółrzędnych (nie tylko prostokątnych jak w zasadzie d'Alemberta).

Do równań Lagrange'a można dojść ze zasady d'Alemberta, wyrażając spółrzędne: $x_1 x_2 \dots y_1 y_2 \dots z_1 z_2 \dots$ jako funkcje nowych zmiennych: $p, q, r \dots$

$$
(a) \begin{cases}
x_1 = f_1(p, q, r \dots) & y_1 = \varphi_1(p\, q\, r \dots) & z_1 = \psi_1(p, q, r \dots) \\
x_2 = f_2(p\, q\, r \dots) & y_2 = \varphi_2(p\, q\, r \dots) & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{cases}
$$

gdzie: $p, q, r \dots$ są zmienne niezależne. Pod tem rozumiemy, że całkiem dowolne (w pewnych granicach) przyjęcie $p, q, r \dots$ daje nam możliwą t.j. zgodną z warunkami geometrycznemi pozycyę systemu. Są to zatem zmienne pozostające po wyrugowaniu innych zapomocą warunków połączenia geometr.: $\varphi(x, y, z \dots) = 0$; $\psi(x, y \dots) = 0$ etc. Oczywiście naodwrót:

$$
(b) \begin{cases}
p = F_1(x_1 x_2 \dots y_1 y_2 \dots z_1 z_2 \dots) \\
q = F_2(x_1 x_2 \dots y_1 y_2 \dots z_1 z_2 \dots) \\
\vdots \qquad \vdots
\end{cases}
$$

Zmienne niezależne $p, q, r \ldots$ mogą wyrażać jakiebądź wielkości a więc: długości, kąty, objętości itd. Warunek jedyny, jaki na nie nakładamy jest ten, aby związki (a) i (b) wyrażały się zapomocą równań zwykłych (nie różniczkowych). Mówimy, że spółrzędne te mają być funkcyami holonomicznemi. Istnieją przykłady, że warunki ruchu dadzą się wyrazić przez spółrzędne, które są przedstawione przez równania różniczkowe niecałkowalne. Otóż te wypadki z naszych rozważań wykluczamy.

Po tych umowach pozostaje nam tylko przeprowadzić odpowiednie transformacye.

Zauważymy przedewszystkiem, że składowe przesunięcia przygotowanego wyrażą się:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial p}\delta p + \frac{\partial x_k}{\partial q}\delta q + \frac{\partial x_k}{\partial r}\delta r + \ldots$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots n$, gdzie n oznacza liczbę punktów systemu. Analogicznie wyrazi się δy_k, δz_k. Analogij tych oczywistych tu i w dalszym ciągu wypisywać nie będziemy i tylko się na końcu na nie

powołamy.

Gdybyśmy wartość na δx_k ... wstawili w równanie D'Alemberta dostalibyśmy:

$$m_k \frac{d^2x_k}{dt^2}\frac{\partial x_k}{\partial p}\delta p \ldots\ldots\ldots\ldots = X_k \frac{\partial x_k}{\partial p}\delta p \ldots\ldots$$

Otóż chodzi najpierw o wyrażenie: $m_k \frac{d^2x_k}{dt^2}\frac{\partial x_k}{\partial p}\delta p$. Tu starbo się używanie symboli skracających: $\frac{dx_k}{dt} = \dot{x}_k$ $\frac{d^2x_k}{dt^2} = \frac{d\dot{x}_k}{dt} = \ddot{x}_k$ itd.

Otóż wyrażenie, o które chodzi, napiszę tak:

$$m_k\left(\frac{d\dot{x}_k}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial p}\right)\delta p = m_k.\delta p\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_k\frac{\partial x_k}{\partial p}\right) - \dot{x}_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p}\right)\right].$$

Zauważymy, że:

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial x_k}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x_k}{\partial r}\dot{r} + \cdots \quad ;$$

oraz $\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial x_k}{\partial p}$; analogicznie $\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x_k}{\partial q}$; itd.

Wprowadzając to wyżej dostaniemy:

$$m_k\left(\frac{d\dot{x}_k}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial p}\right)\delta p = m_k\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_k\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{p}}\right) - \dot{x}_k\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p}\right]\delta p =$$

$$= \frac{m_k}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}_k^2}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\dot{x}_k^2\right)\right]\delta p.$$

To jest jeden z członów, z których trzeba całą sumę

utworzyć. Przyjdą jeszcze człony, zawierające w podobny sposób y_κ, z_κ. Wogólności całe wyrażenie mające za czynnik δp będzie:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p}\frac{m_\kappa}{2}\left(\dot{x}_\kappa^2+\dot{y}_\kappa^2+\dot{z}_\kappa^2\right)\right].\delta p-\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{m_\kappa}{2}\left(\dot{x}_\kappa^2+\dot{y}_\kappa^2+\dot{z}_\kappa^2\right)\right].\delta p$$

Analogiczne zupełnie przyjdą czynniki przy $\delta q, \delta r \dots$ a wszystko to razem ma być pod znakiem sumy względem $\kappa = 1, 2, \dots n$.

Zauważymy dalej, że $\dot{x}_\kappa^2+\dot{y}_\kappa^2+\dot{z}_\kappa^2=v_\kappa^2$ i stąd
$\frac{m_\kappa}{2}\left(\dot{x}_\kappa^2+\dot{y}_\kappa^2+\dot{z}_\kappa^2\right)=\frac{m_\kappa}{2}v_\kappa^2.$

Wprowadzając teraz to wszystko istotnie w równanie d'Alemberta, porządkując według $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$ będziemy mieli

$$\sum_\kappa\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{m_\kappa v_\kappa^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{m_\kappa v_\kappa^2}{2}\right)-\left[X_\kappa\frac{\partial x_\kappa}{\partial p}+Y_\kappa\frac{\partial y_\kappa}{\partial p}+\dots\right]\right\}\delta p+$$
$$\sum_\kappa\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{m_\kappa v_\kappa^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{m_\kappa v_\kappa^2}{2}\right)-\left[X_\kappa\frac{\partial x_\kappa}{\partial q}+Y_\kappa\frac{\partial y_\kappa}{\partial q}+\dots\right]\right\}\delta q+$$
$$+\dots\dots\dots\dots = 0$$

Zauważymy, że $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$ są dowolnemi. Równość

tedy ta może zachodzić tylko pod tym warunkiem, że każda z wypisanych sum po lewej stronie równości jest równa zeru. Wprowadzając na oznaczenie całkowitej energii kinetycznej ~~systemu~~ literę L, dostaniemy w myśl powyższej uwagi równania:

$$
(c)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = \sum_k \left[X_k \frac{\partial x_k}{\partial p} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial p} + \cdots\right] \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_k \left[X_k \frac{\partial x_k}{\partial q} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q} + \cdots\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Są to właśnie równania Lagrange'a. Upraszczają się one jeszcze w wypadku, gdy mamy do czynienia z siłami konserwatywnemi. W tym bowiem razie prawa strona równania pierwszego przechodzi na:

$$
-\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial p} + \cdots\right) = -\frac{\partial U}{\partial p}
$$

i analogicznie równań następnych. Stąd wynika:

$$
(d)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial p} \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\right.
$$

W równaniach tych więc $p, q, r\ldots$ oznaczają zmienne niezależne.

Równania Lagrange'a okazują się użytecznemi w zastosowaniu do wypadków więcej zawiłych z tego głównie względu, że nie potrzeba przeprowadzać wiele transformacyj, bo te już w trakcie wyprowadzenia tych równań do współrzędnych najogólniejszych uskuteczniliśmy.

Nieraz pisze się równania Lagrange'a w formie krótszej, wprowadzając potencyał kinetyczny,

$$H = L - U.$$

$\frac{\partial H}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}}$, bo $\frac{\partial U}{\partial \dot{p}} = 0$, ponieważ potencyał, jak wiemy jest funkcyą współrzędnych, które tutaj są p, $q, r, \ldots$ a nie zawiera explicite prędkości. Równania poprzedniej formy przejdą teraz na inną:

$$(e) \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a. 1.) Uważajmy punkt swobodny o masie m i trzech stopniach swobody ruchu. Stosując doń równania Lagrange'a zauważymy że spółrzędne p, q, r, są tutaj spółrzędne prostokątne x, y, z. Energia kinetyczna tego punktu

$$L = \frac{m}{2}\underbrace{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_{v^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Tutaj $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Zatem równanie Lagrange'a przyjmie postać:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

czyli w myśl używanych znakowań

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

Analogicznie oczywiście dostaniemy:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Są to równania Newtona, znane nam już oddawna. Oczywiście, że nic nowego dostać nie mogliśmy.

2.) Ruch obrotowy ciała koło osi stałej: Ruch taki

posiada jeden tylko stopień swobody. Do określenia zatem pozycji ciała wystarczy podanie kąta φ. Zatem w równaniu Lagrange'a p zastąpimy przez φ.



Fig 138.

$$L = K\frac{\omega^2}{2} = \frac{K}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{K}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = K\dot{\varphi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Stąd równanie Lagrange'a będzie:

$$\frac{d}{dt}(K\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$-\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ oznacza tu moment siły powodującej obrót. Zamiast $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ można tu pisać $\frac{dU}{d\varphi}$; dU oznacza pracę przy pewnem przesunięciu; zatem $-dU = P\,d\varphi$. Stąd znane równanie

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = P.$$

3) Wahadło matematyczne zwykłe. Użyjmy współrzędnych prostokątnych:



Fig 139.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad U = -mgy$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$

Stąd równanie Lagrange'a przyjmie postać:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = mg$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

Dostaliśmy więc równanie na ruch wahadła. Lecz równanie to jest oczywiście fałszywe. W czem leży błąd? Oto w tem, że równanie Lagrange'a jest ważne dla spółrzędnych niezależnych, natomiast spółrzędne x i y nie są niezależne; zachodzi bowiem związek między niemi:

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \text{(koło)}.$$

Jeśli się tedy chce postąpić racjonalnie, trzeba wyrazić L przez zmienne niezależne, do czego zresztą posłuży nam właśnie związek między x i y. Mamy:

$$x\dot{x}+y\dot{y}=0$$

$$\dot{x}=-\dot{y}\frac{y}{x}$$

Stąd $$L=\frac{m}{2}\dot{y}^2\left[1+\frac{y^2}{x^2}\right]=\frac{m}{2}\dot{y}^2\frac{a^2}{a^2-y^2}.$$

Tutaj już jest istotnie energja kinetyczna wyrażona przez jedną zmienną y, a więc warunek niezależności spełniony. Zatem:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y}\frac{a^2}{a^2-y^2}\ ; \quad \frac{\partial L}{\partial y}=m\dot{y}^2\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}$$

Wstawiwszy te wyrażenia w równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial U}{\partial y}$$

dostaniemy równanie następujące:

$$m\ddot{y}\frac{a^2}{a^2-y^2} + 2m\dot{y}^2\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2} - m\dot{y}^2\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2} = mg \quad \text{czyli}$$

$$\ddot{y}\frac{a^2}{a^2-y^2} + \dot{y}^2\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2} = g.$$

Równanie to da się sprowadzić do zwykłej formy, jaką już spotykaliśmy dla wahadła matematycznego, gdy wprowadzimy spółrzędne biegunowe.

Sprawa przedstawi się prościej, gdy odrazu użyjemy spółrzędnych biegunowych. Jako zmiennej niezależnej użyjemy kąta φ. Oczywiście mamy:

$$ds = a\,d\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt}$$

$$L = \frac{m}{2}a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}^2; \qquad U = -mgy = -mga\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ma^2\dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial\varphi} = mga\sin\varphi.$$

Zatem równanie Lagrange'a będzie:

$$ma^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\sin\varphi$$

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi$$

znana forma równania dla wahadła.

4) Wahadło stożkowe. Punkt materyalny porusza się tu po powierzchni kuli, zatem mamy dwa stopnie swobody ruchu. Pozycya punktu określona będzie dwo-

ma kątami θ i φ. To będą spółrzędne niezależne i będzie tedy można dla nich stosować równanie Lagrange'a.

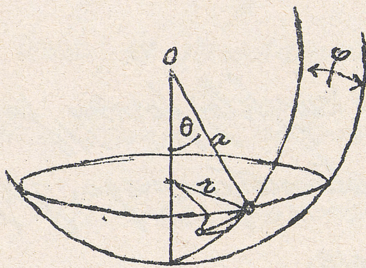


Fig. 140.

Ruch chwilowy styczny do kuli można rozłożyć na równoległe do południka i równoleżnika. Stąd

$$v^2 = \left(a\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(a\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$L = \frac{m}{2}a^2\left[\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right]$$

$$U = -mga\cos\theta.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ma^2\dot\theta \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = ma^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta; \; \frac{\partial U}{\partial\theta} = mga\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = ma^2\sin^2\theta.\dot\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \qquad ; \; \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$$

Wstawiając to w równania Lagrange'a dostajemy równania ruchu dla wahadła stożkowego:

$$\begin{cases} ma^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - ma^2\sin\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -mga\sin\theta \\ ma^2\dfrac{d}{dt}(\sin^2\theta.\dot\varphi) = 0 \end{cases}$$

czyli:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\dfrac{g}{a}\sin\theta \\ a^2\sin^2\theta.\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = Const = c \end{cases}$$

Równanie drugie z uwagi, że $r = a\sin\theta$, daje

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = Const.$$

Znaczenie tego równania znanem już z rozważań nad ruchem planet. Oznacza ono, że prędkość wycinkowa jest wielkością stałą. Stąd mamy $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$, co podstawiając w równanie pierwsze, dostajemy:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta.\cos\theta.\frac{c^2}{a^4\sin^4\theta} = -\frac{g}{a}\sin\theta \quad \text{czyli}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{c^2}{a^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = -\frac{g}{a}\sin\theta \qquad \Big| d\theta$$

W celu całkowania tego równania, pomnożymy je przez $d\theta$. Będzie zatem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{d\theta}{dt}dt - \frac{c^2}{a^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}d\theta = -\frac{g}{a}\sin\theta\, d\theta$$

stąd

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{2a^4\sin^2\theta} = \frac{g}{a}\cos\theta + Const$$

Dla drugiego całkowania przeprowadziwszy proste przemiany dostajemy postać:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{a}\cos\theta + Const - \frac{c^2}{a^4\sin^2\theta}}} = \int dt$$

Po lewej stronie jest całka eliptyczna. Gdy się ją wyliczy, dostaje się:

$$t = f(\theta)$$

Rozważymy chyba jeden specjalny wypadek, gdy ruch jest ściśle stożkowy tj. nitka wraz z punktem zakreśla stożek kołowy. Wtedy $\theta = Const$, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$. Z równania różniczkowego zostaje wtedy:

$$g \sin\theta = \frac{c^2}{a^3} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

Stąd związek kąta θ ze stałą c.

$$c^2 = \frac{g \cdot a^3}{} \frac{\sin^4\theta}{\cos\theta} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \cdot a^2 \sin^2\theta\right)^2$$

Stąd

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a} \frac{1}{\cos\theta}$$

tj. jeśli ruch ma się odbywać przy niezmiennem θ, to zmiana czasowa kąta φ musi być dobrana według tego równania. Można do tego dojść bezpośrednio z rozważania równowagi sił.

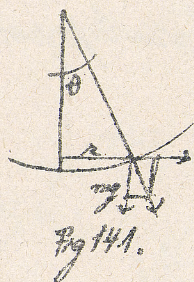


Fig 141.

Równowaga wymaga, by siła wypadkowa miała kierunek nitki. Stąd siła odśrodkowa, jaka tu występuje, będzie:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{m\left(a \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{a \sin\theta}.$$ Dzieląc to przez mg dostajemy $tg\,\theta$.

$$tg\,\theta = \frac{a}{g} \cdot \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Stąd zaś już

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}\frac{1}{\cos\vartheta}$$

identyczne z poprzedniem. $\frac{d\varphi}{dt}$ oznacza prędkość kątową. Możemy więc stąd wyciągnąć bezpośrednio wniosek co do okresu wahania T. Jest bowiem

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a\cos\vartheta}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a\cos\vartheta}{g}}$$

wzór, który już przedtem mieliśmy (str 110).

5) Toczenie się walca po równi pochyłej pod wpływem siły ciężkości.

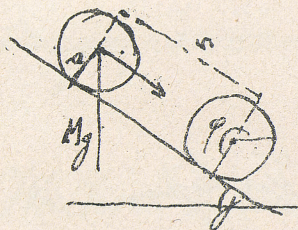


Fig 142.

Aby walec toczył się po równi pochyłej (nie ślizgał) muszą być powierzchnie obu ciał: walca i równi dostatecznie szorstkie. Przy toczeniu się będzie pozycya walca jednoznacznie określona przez podaną łuku $s = a\varphi$ odwiniętego na równi (a promień walca, φ kąt). To więc będzie zmienna niezależna, której użyjemy w równaniu Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = -\frac{\partial U}{\partial s}$$

Energia kinetyczna będzie tu sumą energii kinetycznej ja=

którą walec ma skutkiem ruchu postępowego i energii pochodzącej z ruchu obrotowego walca.

$$L = \frac{M}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{K}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[\frac{M}{2} + \frac{K}{2a^2}\right] \therefore$$

$$L = \frac{\dot{s}^2}{2}\left[M + \frac{K}{a^2}\right].$$

$$U = -Mgy = -Mg\,s\sin\gamma.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \dot{s}\left[M + \frac{K}{a^2}\right]; \quad \frac{\partial L}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial s} = -Mg\sin\gamma. \text{ Stąd}$$

$$\ddot{s}\left[M + \frac{K}{a^2}\right] = Mg\sin\gamma$$

czyli

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g\sin\gamma}{1 + \frac{K}{Ma^2}}$$

Jest to równanie różniczkowe znanego nam już typu. Odrazu wiemy, że ruch będzie jednostajnie przyspieszony. Przyspieszenie atoli: $\frac{g\sin\gamma}{1+\frac{K}{Ma^2}}$ jest odmienne niż przy śliźganiu się ciała. Przy śliźganiu się bowiem jest, jak wiemy, przyspieszenie $g\sin\gamma$.

Oczywiście można było dojść do tego rezultatu bez użycia równań Lagrange'a. Można np. tak rozumować: Ruch postępowy i obrotowy postępują od siebie niezależnie. Pierwszy odbywa się tak, jakby wszyst-

kie siły były skoncentrowane w środku masy, drugi tak jak gdyby środek był w spoczynku a działały natomiast tylko momenty sił. Co do sił to nie wchodzi w rachubę siła normalna, a wchodzą tylko siła styczna i siła tarcia. Tak dostaniemy równania różniczkowe: dla ruchu postępowego:

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = Mg\sin\gamma - R \qquad (R = \text{tarcie})$$

dla ruchu zaś obrotowego

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = aR \qquad (a \text{ promień walca}).$$

Drugie równanie (wobec $s = a\varphi$) można napisać:

$$K\frac{d^2s}{dt^2} = a^2R$$

Wielkość R nie jest znana à priori. Trzeba ją tedy wyrugować. Tak dostaniemy:

$$(Ma^2 + K)\frac{d^2s}{dt^2} = Mg\sin\gamma . a^2$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g\sin\gamma}{1 + \frac{K}{Ma^2}} .$$

Siłę R możemy a posteriori obliczyć:

$$R = \frac{K}{a^2}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{K}{a^2}\cdot\frac{g\sin\gamma}{1 + \frac{K}{Ma^2}} = \frac{Kg\sin\gamma}{a^2 + \frac{K}{M}} = \frac{Mg\sin\gamma}{1 + \frac{Ma^2}{K}} .$$

Dla ciał nie idealnie gładkich mamy empiryczne prawo tarcia $R_s = \varepsilon F_n$, gdzie ε oznacza współczynnik tarcia,

zaś E_n oznacza nacisk normalny. Jeżeli siła dążąca do przesunięcia powierzchni ciał względem siebie jest mniejsza niż tarcie, to ruch względny nie nastąpi oczywiście żaden. Moglibyśmy sobie postawić pytanie, czy przy ciałach rzeczywistych nastąpi ślizganie, czy też toczenie się i kiedy? Aby na to odpowiedzieć trzeba porównać ze sobą siły R i R_s. Chwila zastanowienia wystarczy, by poznać, że w razie nierówności:

$$R < R_s$$

nie może nastąpić ślizganie się. Ponieważ $R_s = \varepsilon Mg \cos\gamma$, więc w myśl tej nierówności jest:

$$\frac{Mg \sin\gamma}{1 + \frac{Ma^2}{K}} < \varepsilon Mg \cos\gamma$$

$$tg\gamma < \varepsilon \left[1 + \frac{Ma^2}{K}\right]$$

Dla walca moment bezwładności ze względu na oś jego geometryczną, jak łatwo obliczyć, wynosi: $K = \frac{Ma^2}{2}$. Zatem

$$tg\gamma < 3\varepsilon.$$

To jest warunek, aby nastąpiło toczenie się walca. Powiemy więc, że toczenie się nastąpi przy dostatecznie małych γ. Wobec skończoności ε dają się zawsze znaleźć

takie, że toczenie nie nastąpi. Zachodzić to będzie dla

$$R = R_s = \varepsilon Mg\cos\gamma$$

Rachunek cały wtedy się zmieni. W równaniach ruchu

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = Mg\sin\gamma - R$$

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Ra$$

zmienne s i φ nie są już ze sobą związane. Są to zmienne niezależne. Te trzy równania wystarczą do wyprowadzenia ruchu. Będzie on częściowo postępowy, częściowo obrotowy.

Zasada Hamiltona.

Zasadę tę można wyprowadzić z równań Lagrangea. W tych ostatnich wchodzą zmienne ogólne $p, q, r\ldots$ niezależne, które czynić muszą zadość równaniom:

$$x = f_1(p, q, r\ldots)$$

$$y = f_2(p, q, r, \ldots)$$

$$z = f_3(p, q, r\ldots)$$

Robimy założenie, że kształt tych funkcyj f nie zmienia się z czasem.

Chcąc więc w ogólnych spółrzędnych wyrazić energię systemu:

$$L = \sum \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

zauważymy, że

$$\dot{x}^2 = a_{11}\dot{p}^2 + a_{22}\dot{q}^2 + a_{33}\dot{r}^2 + \cdots$$
$$+ a_{12}\dot{p}\dot{q} + a_{13}\dot{p}\dot{r} + \cdots + a_{23}\dot{q}\dot{r} + \cdots$$

i analogicznie $\dot{y}^2$, $\dot{z}^2$; współczynniki $a_{11}, a_{22}, \ldots$ są jużto zależne od $p, q, r, \ldots$ jużto w szczególności stałe.

Rozważymy obecnie zmianę energii kinetycznej

$$\delta L.$$

Zmiana taka może pochodzić albo stąd, że prędkość się zmienia albo stąd, że spółrzędne ulegają zmianie. Gdy więc zmianę energii rozpatrywać będziemy ze względu np. na spółrzędną p to powiemy:

$$\delta_p L = \frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta \dot{p}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)\cdot\delta p$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p\right] - \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p}\right]}_{=\frac{\partial U}{\partial p}}\delta p$$

Lecz spółczynnik przy δp w ostatniem równaniu nie wyraża nic innego jak lewą stronę równania Lagrange'a. Zatem:

$$\delta_p L = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p\right] + \frac{\partial U}{\partial p}\delta p$$

Analogicznie wyrazi się $\delta_q L$, $\delta_r L$, ... i stąd zmiana całkowita energii:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + \cdots\cdots\right] \underbrace{+ \frac{\partial U}{\partial p}\delta p + \frac{\partial U}{\partial q}\delta q + \cdots\cdots\cdots}_{\delta U}$$

czyli

$$\delta(L-U) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + \cdots\right].$$

Uważajmy teraz dwie chwile czasu t_1, t_2 między któremi zmiana powyższa następowała, to

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(L-U)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + \cdots\right]dt$$

czyli

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(L-U)\,dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + \cdots\right]_{t_1}^{t_2}$$

Prawa strona tej równości stanie się zerem, jeśli zało-

żymy, że zmiany $\delta p = \delta q = \dots = 0$ dla chwil t_1 i t_2. Wtedy

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - U)\, dt = 0$$

i to jest właśnie zasada Hamiltona. Jakie jej znaczenie? Ruch rzeczywisty punktu lub systemu pod wpływem siły w pewnym kierunku działającej można sobie uzmysłowić jakąś krzywą przestrzenną od punktu 1 do 2 dla czasu od t_1 do t_2. Między punktami 1 i 2, które są stałe, można sobie pomyśleć nieskończenie wiele dróg, po których ruch mógłby się w owym czasie $(t_2 - t_1)$ odbyć. Waryacya całki dla ruchu rzeczywistego jest równa zeru, jeśli od tego ruchu przejdziemy do ruchu nieskończenie mało od niego się różniącego.



Fig. 143.

Z zasady Hamiltona wnioskujemy natychmiast, że wartość całki dla ruchu rzeczywistego będzie zawsze minimum lub maximum. Rozstrzygają o tem warу-

acye wyższych rzędów, czy zachodzi minimum czy też maximum. Z reguły jest minimum.

Zasadę Hamiltona pisze się też krócej kładąc $L - U = H$, wtedy:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} H\,dt = 0$$

H – potencyał kinetycz

Do zagadnień specyalnych zasada Hamiltona nie jest praktyczna, ale za to odznacza się zwięzłością.

Zastosowanie: 1. Rozważmy na podstawie zasady Hamiltona spadanie ciała.

Fig. 144.

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \quad , \quad U = -mgx$$

Według zasady Hamiltona jest dla ruchu rzecz.:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx\right)dt = 0$$

czyli

$$\int_{t_1}^{t_2}(m\dot{x}\,\delta\dot{x} + mg\,\delta x)\,dt = 0$$

Lecz

$$\int_{t_1}^{t_2}\dot{x}\,\delta\dot{x}\,dt = \dot{x}\,\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\ddot{x}\,\delta x\,dt \quad \text{(całkowanie per partes)}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\ddot{x}\,\delta x\,dt$$

Pierwszy składnik bowiem odpada z tego powodu, że dla

granic podstawienia $\delta x_1 - \delta x_2 = 0$. Wstawiając obliczoną wartość całki wyżej mamy:

$$\int_{t_1}^{t_2} (g - \ddot{x})\delta x dt = 0$$

Równość ta ma zachodzić dla wszystkich możliwych zmian δ; to możliwe gdy sam nawias jest równy zeru, gdy więc

$$g = \ddot{x}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

Doszliśmy więc tak drogą kołową do znanego rezultatu.

2. Na spadanie ciał pod wpływem ciężkości moglibyśmy podać kilka hipotez: a) ciało spada ruchem jednostajnie przyspieszonym (prawo spadania) tj. droga $x = \frac{gt^2}{2}$. Dla pewnego T, gdy punkt spadnie z pozycji 1 do 2 jest $x_2 = \frac{gT^2}{2}$.

Fig 145

Obliczmy wartość całki:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{mg^2t^2}{2}; \quad U = -mgx = -\frac{mg^2t^2}{2}$$

$$L - U = mg^2t^2; \text{ stąd}$$

$$\int_0^T mg^2t^2 = mg^2\frac{T^3}{3}$$

b) możemy przypuścić, że ruch odbywa się z prędkością

jednostajną. Wtedy $x = \frac{x_2 t}{T} = g\frac{T}{2}t$; teraz $\dot{x} = g\frac{T}{2}$.

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mg^2T^2}{8}$. $U = -mgx = -\frac{mg^2Tt}{2}$.

$$\int_0^T (L-U)dt = \frac{mg^2T^3}{8} + \frac{mg^2T^3}{4} = \frac{3}{8}mg^2T^3.$$

c) Takssamo moglibyśmy wogóle zakładać, że $x = f(t)$ przyczem dla $t=0$ jest $x=0$, dla $t=T$ jest $x = g\frac{T^2}{2}$. Za każdym razem przekonalibyśmy się, że wartość całki pod a) jest najmniejszą. Być tak oczywiście powinno, bo ruch pod a) jest rzeczywisty.

Jeśli przyjmiemy zasadę Hamiltona jako daną, to łatwo naodwrót wyprowadzić równania Lagrangea. Energia kinetyczna wyraża się nazgół jako funkcya spół. rzędnych i prędkości:

$$L = f(p, q, r, \dots \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dots)$$

Potencyał U wyraża się natomiast tylko jako funkcya spółrzędnych. Wynika to z definicyi potencyału.

$$U = f(p, q, r, \dots).$$

Tworząc waryacye tych funkcyi, tego bowiem żąda

zasada Hamiltona:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L-U)\,dt = 0$$

mamy:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot p}\delta \dot p + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \ldots\ldots$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial p}\delta p + \frac{\partial U}{\partial q}\delta q + \ldots\ldots$$

Wprowadzając to do zasady Hamiltona i pisząc nad znakiem całki znak sumy, który ma nam przypominać, że przeprowadzamy sumację względem $p, q, r \ldots$, dostaniemy:

$$\sum_{p,q,r\ldots}\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial p}\right)\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot p}\delta \dot p\right]dt = 0$$

Całkując per partes

$$\int \frac{\partial L}{\partial \dot p}\delta \dot p\,dt = \delta p\frac{\partial L}{\partial \dot p}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot p}\right)\delta p\,dt$$

i wstawiając to w sumę, mamy:

$$\sum_{p,q,r\ldots}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot p}\right)\right]\delta p\,dt + \sum_{p,q,r\ldots}\frac{\partial L}{\partial \dot p}\delta p\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Ostatnia suma znika, bo dla t_1 i t_2 niema wariacyi. To co zostaje, zachodzić może przy do wol-

nych δp tylko w tym razie, gdy nawias = 0. Nawias ten zaś przedstawia właśnie równanie Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial p}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

<u>Zastosowanie</u> zasady Hamiltona w wypadku równowagi. Jeśli zachodzi równowaga, to energia kinetyczna znika i zasada Hamiltona redukuje się do formy:

$$\int_1^2 \delta U \, dt = 0$$

i wtedy wogóle: $\delta U = 0$

tzn. potencyał jest w tym stanie minimum albo maximum zależnie od znaku potencyału i zmian jakie mogą zajść. To możemy zastosować do równowagi nitek, łańcuchów itp.

Dany jest łańcuch zawieszony końcami w dwu punktach. Na łańcuch ten działają siły X, Y, Z. Pyta-

my, jaki kształt przyjmie łańcuch. Zakładamy, że łańcuch ten jest jednorodny tj. każda jego część ma tą samą gęstość, dalej że łańcuch ten jest nierozciągliwy.

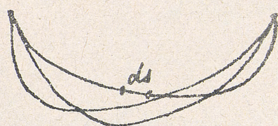


Fig 146.

Jeśli ma być równowaga, to dla każdego elementu ds łańcucha musi zachodzić:

$$\delta U = 0$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\partial z = -(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

i przeto dla całego łańcucha zachodzi też:

$$\int_1^2 (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)ds = 0$$

Z warunku zaś nierozciągliwości wynika:

$$\int_1^2 ds = Const$$

Zadanie tedy nasze redukuje się do znalezienia max. względnie min. przy pewnym warunku. Stosując metodę Lagrange'a utworzymy wyrażenie:

$$\int_1^2 (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)ds + \int \lambda\delta ds = 0$$

Zauważymy: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$ds\,\delta ds = dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz$$

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz$$

$$\int \underbrace{\lambda \frac{dx}{ds}}_{u} \underbrace{d\delta x}_{dv} = \lambda \frac{dx}{ds}\delta x - \int d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)\delta x = \lambda \frac{dx}{ds}\delta x - \int \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)\delta x\, ds$$

(całkowanie per partes). Wstawiając to do powyższego wyrażenia, dostaniemy:

$$\int_1^2 \left\{\left[X - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x + \left[Y - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)\right]\delta y + \left[Z - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)\right]\delta z\right\} ds$$

$$+ \left[\lambda \frac{dx}{ds}\delta x + \lambda \frac{dy}{ds}\delta y + \lambda \frac{dz}{ds}\delta z\right]_1^2 = 0$$

Ostatni składnik znika przy podstawieniu granic, bo łańcuch jest w punktach 1 i 2 przymocowany, zatem $\delta x = \delta y = \delta z = 0$. Pozostałe wyrażenie zaś może przy dowolności $\delta x, \delta y, \delta z$ tylko wtedy zachodzić gdy spełnione są następujące trzy równania Lagrange'a:

$$X = \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)$$

$$Y = \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)$$

$$Z = \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)$$

Do równań tych można dojść bezpośrednio rozważając równowagę każdego kawałka łańcucha. Na element ds łańcucha, który możemy sobie na chwilę wyobrazić jako wycięty z całości, działają siły (napięcia) u dołu T u góry T',

utrzymujące go w równowadze. Otóż te napięcia możemy sobie

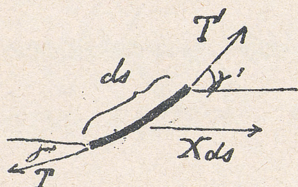


Fig 147.

rozłożyć w trzech kierunkach x, y, z. W kierunku x przypada ślad z napięcia górnego $T'\cos\gamma' = T'\frac{dx}{ds}$, z napięcia zaś dolnego $-T\cos\gamma = -T\frac{dx}{ds}$, a że na element ów działa jeszcze siła $X\,ds$ w kierunku osi x, więc całkowita siła działająca na ów element w kierunku osi x jest:

$$X\,ds + T'\left(\frac{dx}{ds}\right) - T\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0 \qquad \text{czyli}$$

$$X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

Analogicznie

$$Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

$$Z + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

Są to też same równania Lagrange'a co wyżej. Widzimy tu zarazem znaczenie mechaniczne owego czynnika nieokreślonego λ, któryśmy poprzód wprowadzili. Oznacza on poprostu napięcie łańcucha.

Także równanie:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,ds = -\int \delta U\,ds = 0$$

ma proste znaczenie mechaniczne. Pisząc je w formie

$$\delta(\sum U) = 0$$

widzimy, że oznacza ono, że waryacya sumy potencyałów składowych $= 0$. Jeśli chodzi o ciężkość $U_k = mgy_k$ więc

$$U = \sum mgy = g\sum my \; ,$$

to dostajemy $\delta \underbrace{\sum my}_{\eta \cdot \sum m} = \delta[\eta \cdot \sum m] = 0$, tj. środek masy łańcucha ma leżyć najniżej; waryacya bowiem może się tylko odnosić do η, a więc owo η ma być maximum lub minimum.

Jeśli siły działające na łańcuch są potencyalne, X, Y, Z, to możemy wyprowadzić jeszcze jedną relacyę. Występujący w równaniach Lagrange'a czynnik nieokreślony λ jest zmienny w zależności od pozycyi w łańcuchu. Stąd równania Lagrange'a możemy inaczej tak napisać:

$$\frac{d\lambda}{ds}\frac{dx}{ds} + \lambda\frac{d^2x}{ds^2} = X \qquad \Big| \; \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\lambda}{ds}\frac{dy}{ds} + \lambda\frac{d^2y}{ds^2} = Y \qquad \Big| \; \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d\lambda}{ds}\frac{dz}{ds} + \lambda\frac{d^2z}{ds^2} = Z \qquad \Big| \; \frac{dz}{ds}$$

Stąd dostajemy:

$$\frac{d\lambda}{ds}\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}+\lambda\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)=$$

$$=\frac{X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}{ds}$$

Lecz oczywiście: $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}=1$; $\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=$

$=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]=0$; $X=-\frac{\partial U}{\partial x}$, $Y=-\frac{\partial U}{\partial y}$, $Z=-\frac{\partial U}{\partial z}$.

Całe więc powyższe wyrażenie przybiera kształt:

$$d\lambda=-dU$$

$$\lambda=-U+Const$$

tj czynnik λ, czyli napięcie jest miarą potencyału, które w danym punkcie istnieje.

Jako specyalny wypadek rozważymy łańcuch w polu ciężkości.

$$X=0,\quad Y=-\gamma\ ,\quad Z=0$$



Fig 148.

$-\gamma$ oznacza ciężkość 1 cm długości, więc

$\gamma=q\rho g$ (q przekrój, ρ gęstość, g przysp.)

Równania poprzednie przyjmą kształt:

$$\frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right) = -\gamma$$

$$\frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right) = 0$$

Zakładając, że łańcuch jest w płaszczyźnie xy możemy trzecie równanie opuścić. Z dwóch zaś pierwszych przez całkowanie dostajemy:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = Const = c$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = -\gamma s + b$$

Początek układu jest dowolny. Załóżmy, że niech się on tam znajduje, gdzie łańcuch jest poziomy t.j. $\frac{dy}{ds} = 0$, oraz $s = 0$; Dostajemy stąd określenie stałej $b = 0$. Zatem

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = -\gamma s$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\gamma s}{c}$$

Chcąc to równanie całkować musimy uwzględnić zależność łuku s od x i y. Użyjemy tu metody różniczkowania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\gamma}{c}\frac{ds}{dx} = -\frac{\gamma}{c}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\int \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}dx = -\int \frac{\gamma}{c}\, dx$$

Kładąc $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ mamy:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \log\left(\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) =$$

$$= -\frac{\gamma}{c}x + Const$$

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{-\frac{\gamma}{c}x + Const} = ae^{-\frac{\gamma}{c}x}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = ae^{-\frac{\gamma}{c}x} - \frac{dy}{dx}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2e^{-\frac{2\gamma}{c}x} - 2\frac{dy}{dx}ae^{-\frac{\gamma}{c}x} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2e^{-\frac{2\gamma}{c}x}-1}{2ae^{-\frac{\gamma}{c}x}} = \frac{1}{2}\left\{ae^{-\frac{\gamma x}{c}} - \frac{1}{a}e^{\frac{\gamma x}{c}}\right\}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{c}{\gamma}\left\{-ae^{-\frac{\gamma x}{c}} - \frac{1}{a}e^{\frac{\gamma x}{c}}\right\} + Const$$

Dla oznaczenia stałych całkowania przypomnięmy, że dla $x=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ bo w tem miejscu łańcuch jest poziomy. Zachodzi więc jedno równanie:

$$0 = \frac{1}{2}\left\{a - \frac{1}{a}\right\}$$

skąd $a = 1$. Zatem

$$y = -\frac{c}{2\gamma}\left(e^{\frac{\gamma x}{c}} + e^{-\frac{\gamma x}{c}}\right) + Const$$

Na razie określiliśmy oś y; oś x tak dobierzemy, żeby Const znikało tj. gdzie $x=0$, tam $y = -\frac{c}{\gamma}$. Stała c jest dowolna. Przywracając znak $+$ na miejsce $-$, co poprostu można tak uzyskać, że na miejsce c wstawi się $-c$ dostajemy równanie linii łańcuchowej:

$$y = \frac{c}{2\gamma}\left(e^{\frac{\gamma x}{c}} + e^{-\frac{\gamma x}{c}}\right)$$

To równanie można inaczej napisać:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

lub

$$y = m \cdot \cos hip. \left(\frac{x}{m}\right)$$

Z tych równań możemy wywnioskować jaki kształt ma krzywa.

Chcąc oznaczyć napięcie λ, względnie $-\lambda$ rekurujemy do równań

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c$$

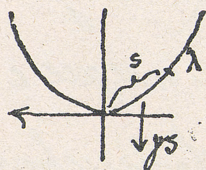
$$\lambda \frac{dy}{ds} = -\gamma s$$

$$\lambda^2 \frac{dx^2+dy^2}{ds^2} = c^2+\gamma^2 s^2$$

$$\lambda = \sqrt{c^2+\gamma^2 s^2}$$

(Znak + bierzemy bo chodzi nam o wartość bezwzględną).

Wielkość owego λ można zresztą wykombinować bezpośrednio. Chodzi nam o napięcie w pewnem miejscu.



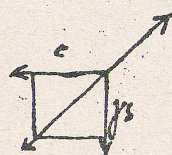


Fig 149.

Część łuku s posiada ciężar γs, napięcie zaś w miejscu poziomem w kierunku poziomym wynosi c, bo równanie $\lambda \frac{dx}{ds} = c$ przechodzi dla tego miejsca w $\lambda_0 = c$. Ze składania sił wynika więc $\lambda = \sqrt{c^2+\gamma^2 s^2}$

Mieliśmy przedtem równanie:

$$\lambda = -U$$

Ponieważ tu w szczególności $U = \gamma y$, zatem

$$\gamma^2 y^2 = c^2+\gamma^2 s^2$$

$$s^2 = y^2 - m^2$$

$$s = \sqrt{y^2-m^2}$$

Jest to własność linii łańcuchowej, mocą której

kwadrat długości łuku = różnicy kwadratów rzędnej i stałej m. Można to sprawdzić przez rektyfikację.

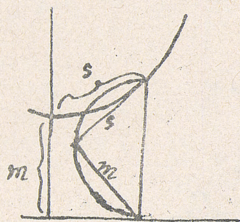


Fig 150.

W związku z tem zagadnieniem, któreśmy tu rozpatrywali są inne problemy. Możnaby się pytać np. o warunki równowagi, gdy ciężar nie jest równomiernie rozłożony. Miałoby to miejsce, gdyby na każdy cm rzutu przypadał ciężar jednakowy. Naturalnie przecież łańcuch na dole musiałby być grubszy niż w innych miejscach.




Fig 151.

W praktyce jest to urzeczywistnione poniekąd przy mostach łańcuchowych, w których ciężar głównie pochodzi od belki a ciężar łuku jest stosunkowo nieznaczny. Będzie teraz:

$$X = 0, \quad Y = \gamma \frac{dx}{ds};$$

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c; \qquad \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right) = \gamma \frac{dx}{ds}$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = \gamma x + \alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{c} x + \frac{\alpha}{c}$$

$$y = \frac{\gamma}{c} \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha}{c} x + \beta$$

Jest to równanie paraboli. Łańcuch więc w tym wypadku ułoży się w kształcie paraboli.

Ruch względny.

Dotychczasowe równania ruchu wyprowadziliśmy dla układu nieruchomego z czasem w przestrzeni. Takiem równaniem jest np. równanie d'Alemberta:

$$\sum\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right]=0$$

Zapytamy się obecnie jakim zmianom ulegną te równania w razie zmienności układu. Widoczną bowiem np. jest rzeczą, że nie zmienią się one przy jednostajnej translacji układu. W szczególności rozstrzygniemy pytanie jakim zmianom ulegną równania ruchu w razie obrotu układu jednostajnego, zakładając, że oś z zostaje niezmieniona. Kąt φ rośnie proporcyonalnie do czasu. Jeśli prędkość kątową naznaczymy: ω,

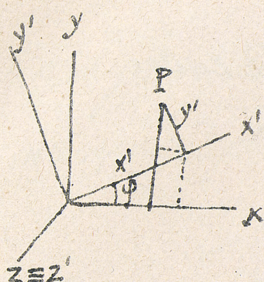


Fig 152.

$$\varphi = \omega t.$$

Wzory transformacyjne są ta:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$

Chcąc tedy otrzymać równanie d'Alemberta dla nowego układu wystarczy zastosować owe wzory transformacyjne w celu wyrażenia zmiennych występujących w równania d'Alemberta przez zmienne nowe.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}\cos\omega t - x'\omega\sin\omega t - \frac{dy'}{dt}\sin\omega t - y'\omega\cos\omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt}\sin\omega t + x'\omega\cos\omega t + \frac{dy'}{dt}\cos\omega t - y'\omega\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\omega t - 2\frac{dx'}{dt}\omega\sin\omega t - x'\omega^2\cos\omega t - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\omega t - 2\frac{dy'}{dt}\omega\cos\omega t + y'\omega^2\sin\omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\sin\omega t + 2\frac{dx'}{dt}\omega\cos\omega t - x'\omega^2\sin\omega t + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\omega t - 2\frac{dy'}{dt}\omega\sin\omega t - y'\omega^2\cos\omega t$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ wyrażają nam przesunięcia przygotowane

tj zgodne z warunkami ruchu geometrycznemi. Nie zależą tedy one od czasu t. Stąd

$$\delta x = \delta x' \cos\omega t - \delta y' \sin\omega t$$
$$\delta y = \delta x' \sin\omega t + \delta y' \cos\omega t$$
$$\delta z = \delta z'$$

Dalej praca przygotowana jest też niezależna od układu stąd:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'.$$

Wszystkie teraz te wartości wstawimy w równanie d'Alemberta. Dostaniemy:

$$\sum\Big[\Big\{m\Big[\frac{d^2x'}{dt^2} - x'\omega^2 - 2\frac{dy'}{dt}\omega\Big] - X'\Big\}\delta x' + \Big\{m\Big[\frac{d^2y'}{dt^2} - y'\omega^2 + 2\frac{dx'}{dt}\omega\Big] - Y'\Big\}\delta y' + \Big\{m\,\frac{d^2z'}{dt^2} - Z'\Big\}\delta z'\Big] = 0$$

Jeśli bierzemy pod uwagę tylko jeden punkt materyalny wtedy suma zredukuje się do jednego składnika. Ponieważ zaś $\delta x', \delta y', \delta z'$ oznaczają nam przesunięcia przygotowane, dowolne więc byle tylko zgodne z warunkami ruchu, przeto równanie to może zachodzić, gdy

każdy z nawiasów znika. Dostajemy tak trzy równania ruchu:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{X'}{m} + x'\omega^2 + 2\omega\frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{Y'}{m} + y'\omega^2 - 2\omega\frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{Z'}{m}$$

Zakładając, że masa $m=1$ napiszemy te równania jeszcze prościej:

$$\text{(I).}\qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = X' + x'\omega^2 + 2\omega\frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' + y'\omega^2 - 2\omega\frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = Z'.$$

Równania te są różne od równań ruchu dla swobodnego punktu wyprowadzonych dla układu niezmiennego. W układzie stałym jest bowiem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Widzimy więc, że pierwsze składniki po prawej stronie

równań (I) nakrywają się. Jakie jest znaczenie dalszych składników? Składniki mające ω^2 wyrażają siły składowe jakiejś siły dodatkowej. Wypadkowa tych sił

$$\omega^2\sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \frac{v^2}{r}$$

jest po prostu siłą odśrodkową.

Nieco dziwniejszy kształt mają składniki zawierające ω. Przedstawiają one znowu oczywiście jakąś siłę dodatkową, powstałą skutkiem obrotu. Siłę tę nazywamy siłą Coriolisa. Wpływ jej jest w różnych przykładach dosyć ciekawy. Gdy przyjmiemy że widzimy tylko układ ruchomy to siła ta proporcyonalna do prędkości co ma raz kierunek zgodny drugi raz przeciwny do sił składowych.

Rozpatrzymy wpływ tych sił na ruch punktu na powierzchni ziemi. Siłę odśrodkową można połączyć z siłą ciężkości, bo siła ta ma potencyał.

$$U' = \frac{x'^2+y'^2}{2}\omega^2$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x'} = x'\omega^2 \qquad \frac{\partial U'}{\partial y'} = y'\omega^2$$

Wprowadzając tedy oznaczenia: $X' + x'\omega^2 = \boxed{X'}$,

$Y' + y'\omega^2 = \textcircled{Y'}$, mamy:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \textcircled{X'} + 2\omega\frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \textcircled{Y'} - 2\omega\frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \textcircled{Z'}$$

Dobierzemy jeszcze odpowiednio układ spółrzędnych dla ziemi. Niech osią z będzie oś obrotu ziemi, oś x niech

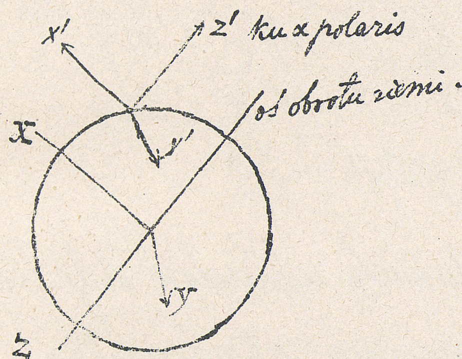


Fig 153.

będzie w płaszczyźnie rysunku, oś y ⊥ do płaszczyzny rysunku. Układ ten poruszywszy się wykonuje wraz z ziemią obrót. Możemy go przenieść na powierzchnię ziemi. Oś z' ∥ z skierowana będzie do α polaris, x' ⊥ z', y' oznacza kierunek wschodni. Wyobrażamy sobie teraz że układu stałego nie widzimy i wprowadzamy na miejsce ostatniego układu jeszcze jeden nowy który oznaczymy sobie x y z; niech on ma początek na powierz=

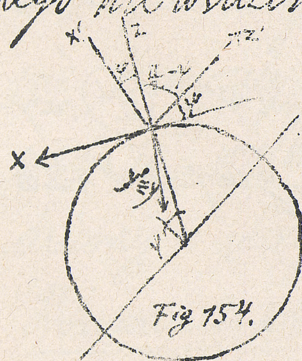


Fig 154.

chni ziemi w tem sam zresztą miejscu gdzie poprzedni pod ψ° szerokości geogr. W tym nowym układzie niech oś $y \equiv y'$, oś z niech będzie pionem, oś zaś $x \perp z$ i $\perp y$. Oś x zatem będzie leżała w poziomie i skierowana będzie na południe, a z poprzednią osią z' zamykać będzie kąt ψ. Wzory transformacyjne tych układów będą:

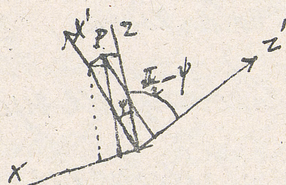


Fig 155

$$x = x'\sin\psi - z'\cos\psi$$
$$z = x'\cos\psi + z'\sin\psi$$
$$y = y'$$

Skutkiem przyjęcia takich układów siły zewnętrzne odniesione do jednego gramu określą się:

$$(X') = -g\cos\psi$$
$$(Y') = 0$$
$$(Z') = -g\sin\psi$$

Wstawiając to, dostajemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\sin\psi - \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\psi = (X')\sin\psi - (Z')\cos\psi +$$
$$+ 2\omega\left(\frac{dy'}{dt}\sin\psi = -g\cos\psi\sin\psi + g\cos\psi\sin\psi + 2\omega\frac{dy'}{dt}\sin\psi\right.$$

Tak dostajemy:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega \frac{dy'}{dt} \sin\psi$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = -g + 2\omega \frac{dy'}{dt} \cos\psi$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega \frac{dx'}{dt}$$

czyli sprowadzając te równania do spółrzędnych jednego tylko układu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\psi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left(\sin\psi \frac{dx}{dt} + \cos\psi \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega \cos\psi \frac{dy}{dt}$$

Są to więc równania różniczkowe ruchu punktu swobodnego pozostającego tylko pod wpływem ciężkości. Są one całkiem odmienne niż dla ziemi <u>nieruchomej</u>. Całkowanie tych równań da się przeprowadzić ściśle, ale w tym wypadku wystarczy pewne przybliżenie. Zauważymy w tym celu, że $\omega = \frac{2\pi}{24.60.60}$ wielkość rzędu 10^{-4}, wielkość mała w porównaniu do g. Stąd będziemy ω^2 odrzucać.

<u>Równania pierwsze i trzecie</u> całkujemy bezpośrednio

$$\frac{dx}{dt} = \alpha + 2\omega \sin\psi . y$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma - gt + 2\omega \cos\psi . y \qquad \alpha, \gamma \text{ stałe całk.}$$

Wstawiając to do równania drugiego, mamy:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega(\alpha \sin\psi + \gamma\cos\psi - gt\cos\psi)$$

[ω^2 odrzucone].

$$\frac{dy}{dt} = \beta - 2\omega t(\alpha \sin\psi + \gamma\cos\psi) + \omega g t^2 \cos\psi$$

$$y = y_0 + \beta t - \omega t^2(\alpha \sin\psi + \gamma\cos\psi) + \frac{\omega g t^3}{3}\cos\psi,$$

Kładąc $y_0 = 0$ mamy

(a) $$y = \beta t - \omega t^2(\alpha \sin\psi + \gamma\cos\psi) + \frac{\omega g t^3}{3}\cos\psi.$$

Wstawiając teraz to równanie do dwóch poprzednich, i odrzucając składniki zawierające ω^2 dostaniemy:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha + 2\omega \sin\psi . \beta t$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma - gt + 2\omega\cos\psi . \beta t.$$

całkując znów je, dostajemy:

(b) $$x = \alpha t + \omega t^2 \beta . \sin\psi.$$

(c) $$z = \gamma t - \frac{gt^2}{2} + \omega t^2 \beta \cos\psi.$$

Tak więc dostaliśmy trzy równania: (a), (b), (c) odniesione do układu wirującego jednostajnie wraz z zie-

nia, określające nam ruch punktu materyalnego, pozostającego pod wpływem ciężkości. α, β, γ są stałe całkowania, ψ szerokość geograficzna. Przez dobór stałych α, β, γ można równania (a)(b)(c) specyalizować:

1. Powiedzmy najpierw, że ciało spada bez prędkości początkowej tj. $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Równania (a)(b)(c) przejdą wtedy na takie:

$$x = 0$$

$$y = \frac{\omega g t^3}{3} \cos\psi$$

$$z = -\frac{g t^2}{2}$$

Ciało więc według tych równań zbacza w czasie swobodnego spadania na wschód i to proporcyonalnie do 3ciej potęgi czasu. Pozostaje to w związku z tem, że prędkość styczna w wyższych warstwach ziemi jest większa niż w niższych. Zboczenia owe dają się stwierdzić doświadczeniem. Próby tego były już za

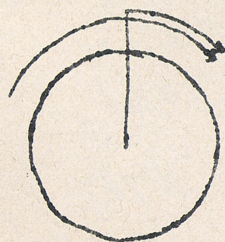


Fig 156.

czasów Newtona, potem fizycy Niemcy starali się to

urzeczywistnić lecz bez powodzenia, bo przeszkadzały temu prądy powietrza. Najdokładniejsze doświadczenie zrobił Reich we Freibergu w Saksonii z począt. 19. wieku, badając swobodne spadanie ciała w szybie głębokim na 158.5 m, $\varphi = 50°27'$. Odchylenie wyniosło $y = 2.84$ cm. Ze wzoru powinno wypaść 2.75 cm. Stąd zatem 1 mm jest całkiem nieznaczny.

2. Gdy rozpatrujemy ruch ciała wystrzelonego w kierunku poziomym na południe tj. w kierunku x, natenczas α oznacza prędkość, z jaką ciało wystrzeliliśmy, $\beta = \gamma = 0$. Wtedy

$$x = \alpha t$$

$$y = -\omega t^2 \alpha \sin\varphi + \frac{\omega g t^3}{3} \cos\varphi$$

$$z = -g\frac{t^2}{2}.$$

W wyrażeniu na y występuje teraz jeszcze nowy człon o znaku ujemnym. Oznacza to, że ciało będzie nieco zbaczać na zachód. Gdybyśmy wystrzelili ciało na północ, wtedy $+\alpha$ przejdzie na $-\alpha$ ciało więc znowu zbaczać będzie na wschód. Zboczenia te ze względu, że dla $t < 1$ $t^2 > t^3$ są znaczniejsze z początku.

Pomyślmy teraz sobie ciało wystrzelone na wschód:

$$\beta \neq 0 \,, \quad \alpha = \gamma = 0$$

Wtedy:

$$x = \omega t^2 \beta \sin\varphi$$

$$y = \beta t + \frac{\omega g t^3}{3} \cos\varphi$$

$$z = -\frac{g t^2}{2} + \omega t^2 \beta \cos\varphi .$$

Pierwsze równanie wskazuje że ciało zbacza nieco na południe. Gdybyśmy znowu wystrzelili ciało na zachód to $+\beta$ przeszłoby na $-\beta$; ciało zbaczałoby na północ. Widzimy więc, że jakkolwiek bądź wystrzelimy ciało na półkuli północnej (to założenie leży już w doborze szerokości geograficznej φ) to ono zawsze zbaczać będzie na prawo. Zboczenia te mają znaczenie geofizyczne. Powietrze napływające do minimum barometrycznego tworzy wiry, zbaczając na półkuli północnej na prawo. Na półkuli południowej jest odwrotnie. (Dove'sches Windgesetz). Twierdzono nawet, że to zbaczanie uwidacznia się także w biegu rzek. Baer twierdził, że rzeki płyną-



Fig 157.

myją dlatego więcej prawy brzeg niż lewy. Szczegół ten jednak podlega jeszcze dyskusji, bo oczywiście czynnik powodujący to zboczenie na prawo jest nadzwyczaj słaby.

W wyrażeniu na z wchodzi jeszcze składnik $v.t^{2}\omega y.\beta$ powodujący zmniejszenie spadania w kierunku pionowym. Wpływ jego jednak jest bardzo nieznaczny.

Ruch wahadła na ziemi obracającej się.

Chcąc zdania sobie sprawy z ruchu wahadła, gdy uwzględnimy obrót ziemi możemy użyć formy d'Alemberta itp; ale można też z góry przewidzieć, o ile równania dla wahadła różnić się będą od równań punktu swobodnego, przez to, że dodamy jeszcze warunki przymusowe, jakim punkt wahadła musi podlegać:

$$\varphi(x\,y\,z)=0.$$

W myśl tego równania dla punktu swobodnego (str. 263) z uwzględnieniem obrotu ziemi przejdą na następujące równania dla wahadła:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left(\sin\psi\frac{dx}{dt} + \cos\psi\frac{dz}{dt}\right) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\cos\psi\frac{dy}{dt} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Gdzie warunek $\varphi(xyz)=0$ będzie oznaczał, że punkt ma zostawać na powierzchni kuli:

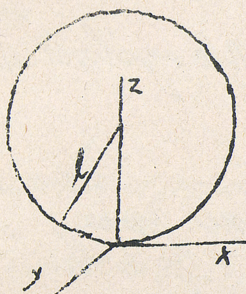


Fig 158.

$$\varphi(xyz) = x^2 + y^2 + (l-z)^2 - l^2 = 0$$

Stąd:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2(z-l).$$

Równania więc wyraźnie wypisane będą:

$$\frac{dx}{dt} \quad \Big| \; y \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\sin\psi\frac{dy}{dt} + \lambda x$$

$$\frac{dy}{dt} \quad \Big| \; x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\sin\psi\left(\frac{dx}{dt} + \cos\psi\frac{dz}{dt}\right) + \lambda y$$

$$\frac{dz}{dt} \quad \Big| \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\cos\psi\frac{dy}{dt} + \lambda(z-l)$$

Mnożąc je odpowiednio przez $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ i dodając dostaniemy:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -g\frac{dz}{dt}$$

Otrzymuje to scałkowane daje prawo zachowania energii:

$$\frac{V^2}{2} = -gz + H$$

H stała całk. Zauważymy, że siła Coriolisa znika w tem wyrażeniu. Możnaby o tej sile ogólnie dowieść, że nie wykonywa ona pracy.

Pomnóżmy teraz pierwsze równanie przez y, drugie przez x i odejmijmy drugie od pierwszego:

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\sin\psi\left(y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt}\right) + \cancel{2\omega x\cos\psi\frac{dz}{dt}}.$$

O ile z jest małe w porównaniu do x, to możemy ostatni składnik pominąć, tak że dostaniemy:

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = \omega\sin\psi\frac{d}{dt}\left(x^2+y^2\right).$$

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = C + \omega\left(x^2+y^2\right)\sin\psi.$$

Opuszczając też w równaniu zachowania energii składnik $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ z tego samego powodu co wyżej, dostajemy dwa równania, wystarczające do opisania ruchu wahadła:

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -2gz + H$$

$$(\beta) \qquad y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = C + \omega(x^2+y^2)\sin\psi.$$

W dalszym ciągu wprowadzimy spółrzędne biegunowe:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

a z wyrugujemy się przy pomocy równania kuli: jest bowiem

$$x^2+y^2+(l-z)^2 = l^2$$

$$x^2+y^2-2lz + \cancel{z^2} = 0$$

(z^2 znika w porównaniu do innych członów).

Równania $(\alpha)(\beta)$ uproszczą się, gdy zważymy, że

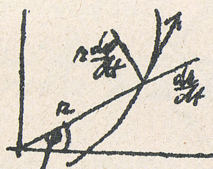


Fig 159.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = -r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

do postaci:

$$(\alpha') \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l}r^2 + H$$

$$(\beta') \qquad r^2\frac{d\varphi}{dt} = c - \omega r^2\sin\psi$$

Równanie (β') wyrażałoby, gdyby nie było drugiego członu, prawo, że prędkość wycinkowa jest stałą. Od tego członu można się uwolnić za pomocą transformacyi:

$$\Phi = \varphi + \omega t\sin\psi$$

(ψ szerokość geogr.)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \omega \sin\psi .$$

ψ jest stałe, o ile uważamy wahnienia na małej przestrzeni.

Stąd $\quad r^2\frac{d\Phi}{dt}$ ~~$- r^2\omega\sin\psi$~~ $= c$ ~~$- r^2\omega\sin\psi$~~

czyli

(β'') $$r^2\frac{d\Phi}{dt} = c \quad (\text{const}).$$

a więc istotnie w tym nowym układzie prędkość wycinkowa jest stała. Taką relację wyprowadziliśmy już wyżej, gdyśmy rozważali ruch wahadła bez uwzględnienia obrotu ziemskiego.

Wstawmy teraz ów wzór transformacyjny przez c w równanie (α'). Będzie:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 = H - \frac{g}{l}r^2 + 2\omega \overbrace{r^2\frac{d\Phi}{dt}}^{c}\sin\psi - \omega^2 r^2\sin^2\psi$$

$$= H - \frac{g}{l}r^2 + 2\omega c\sin\psi$$ ~~$- \omega^2 r^2\sin^2\psi$~~

Pomijając człon ostatni z powodu znikomo małego ω^2 i zbierając wielkości stałe w jeden wyraz h, otrzymujemy:

(α'') $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 = h - \frac{g}{l}r^2$$

czyli wobec $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{c}{r^2}$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = h - \frac{g}{l}r^2$$

Równania (α'') i (β'') są takiesame jak równania w spółrzędnych biegunowych wahadła bez uwzględnienia obrotu ziemskiego (Porównaj str 107 (a) i (b)), przy ograniczeniu się oczywiście do małych wychyleń.

Różniczkując (α') dostajemy:

$$2\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d^2r}{dt^2} - 2\frac{c^2}{r^3}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{2g}{l}\, r\left(\frac{dr}{dt}\right) \quad \text{czyli}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\, r$$

Wyrażenie po lewej stronie oznacza przyspieszenie w kierunku promienia wodzącego (str 78). Z prawej strony tegoż równania widzimy, że przyspieszenie to jest proporcyonalne do wychylenia. Siła zatem ma charakter siły sprężystej, i ruch przeto wahadła będzie się odbywał tak, jakby na masę jego działała siła sprężysta. Będzie to zatem ruch harmoniczny. Punkt materyalny poruszać się będzie na ogół po elipsie. Okres wahnień będzie, jak zwykle, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Zwróćmy się obecnie jeszcze do wzoru transfor-

macyjnego:

$$\Phi = \varphi + \omega t \sin\psi$$

i zapytajmy, co on wyraża. Kąt φ oznacza odchylenie rzutu nitki wahadła na płaszczyźnie poziomej od kierunku południowego x. Połóżmy $\varphi = Const$ tj. załóżmy, że wahania odbywają się w płaszczyźnie. $\omega \sin\psi$ jest wielkością stałą. (ψ szerokość geogr.) Równanie tedy owo oznacza że płaszczyzna wahnień wiruje z prędkością jednostajną około pionu. Prędkość ta wynosi mianowicie $\omega \sin\psi$.

Można to zademonstrować najlepiej w ten sposób, że się elipsę degeneruje w prostą, co łatwo zrobić; wystarczy bowiem wychylić masę wahadła i puścić ją. Przytwierdzony ewentualnie kolec do tej masy będzie zakreślał pęk płaszczyzn względnie pewną krzywą na płaszczyźnie poziomej. (Fig 160).

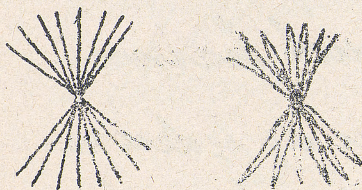


Fig 160

Historycznej wagi takie doświadczenie zrobił Foucault w kopule Panteonu w Paryżu jako dowód obrotu ziemi

koło swej osi.

Doświadczenie to należy do trudniejszych z powodu długości czasu, jaki na doświadczenie trzeba użyć, i wpływów zewnętrznych jak wiry powietrza, wstrząśnienia itp. W szerokości geogr $\varphi = 50°$ płaszczyzna wahnień obróci mniej więcej o 180° t. j. 15°-20° na godz.

Z punktu widzenia logicznego z doświadczenia Foucault'a nie wynika bynajmniej, że ziemia się obraca koło swej osi, bo rozumowanie opiera się na tem, że równania mechaniki:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m}$$

są ścisłe. Gdyby atoli był Newton równania swe wyprowadził drogą ściśle empiryczną to nigdyby takiego kształtu był nie dostał. Gdyby się natomiast doświadczenia bardzo ściśle zrobiło, to doszłoby się do równań z pewnemi stałemi α, β zależnemi od szerokości geograficznej kształtu takiego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} + \alpha \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m} - \alpha \frac{dx}{dt} - \beta \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m} + \beta \frac{dy}{dt}$$

gdzie $\alpha = 2\omega \sin\varphi$, $\beta = 2\omega \cos\varphi$. Otóż mając równania Newtonowskie supomujemy, że składniki tych równań nie wchodzące w równania Newtona, pochodzą z obrotu ziemi koło osi swej. Moglibyśmy atoli nie robiąc wcale tej supozycji, (coby miało najprawdopodobniej miejsce gdybyśmy równań Newtona nie mieli, a mieli tylko równania ostatnie), te ostatnie równania uważać za zasadnicze, a o obrocie ziemi niebyśmy nie wiedzieli. Może kształt tych równań byłby nieco dziwny, bo nie tak prosty jak równań poprzednich. Z punktu jednak logicznego zjawiska nie muszą się wyrażać najprostszemi równaniami. Tak więc nie mamy żadnego logicznego dowodu obrotu ziemi koło swej osi, a przyjmujemy to dla prostoty.

W fizyce i wogóle w naukach przyjmuje się chętnie hipotezy te, które są prostsze. Dawniej mówiono, że czyni się to dlatego, bo prawa przyrody są proste. Nie da się to jednak dowieść. Mach tedy powiada, że dlatego przyjmujemy hipotezy prostsze, bo jest nam przy tem najwygodniej rachować (nominalizm). Jest w tem zawarta poniekąd supozycya, że prawa istniejące w przyrodzie wcale nie są proste. Prawdopodobnie rzeczywistość jest pośrodku. Szukamy najprostszych form, bo umysł ludzki je najłatwiej obejmuje. W innych naukach jednak niema tak praw prostych. Np. chemia jest to leksykon praw, które atoli nie są ani bardzo ścisłe ani bardzo proste. Że w fizyce zdołano się takie prawa proste wyszukać, to musi polegać na jakiejś objektywnej wartości.

Newton doszedł do swoich równań na podstawie obserwacyj astronomicznych Keplera. Możnaby do nich dojść też drogą logiczną, gdyby się miało równania dla ruchu punktu swobodnego na ziemi i to przez odnośną transformacyę. Powiedział

łoby się wtedy, że równania tak otrzymane odnoszą się do układu zmiennego. Przyjęcie to byłoby bardzo hipotetyczne lecz uzasadnione, byłoby właśnie prostotą wyrażeń.

Kwestye tu poruszone naprowadzają nas na zasadę względności. Równania Newtonowskie odniesione do jakiegobądź układu nie zmieniają się, gdy na miejsce dawnego układu wprowadzimy nowy poruszający się ruchem jednostajnym prostolinijnym względem pierwszego. Wtedy bowiem jest:

$$x = x' + \alpha t \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} = X$$

$$y = y' + \beta t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2} = Y$$

$$z = z' + \gamma t \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2} = Z$$

Zjawiska tedy odbywają się niezależnie względem ruchu jednostajnego prostolinijnego. Nie można tego jednak jak widzieliśmy stosować do ruchów obrotowych. Tu bowiem już zachodzą zmiany. Ta zasada względności znana już od czasów Newtona została uogólniona

i doszło się tak do rewizyi pojęcia „czasu".

Od kilkunastu lat starano się na polu elektrodynamiki i optyki określić ruch ziemi względem eteru, który uważano za stały. Według dawnej elektrodynamiki (H. Hertz) ruch względem eteru powinien się dać wykazać. Natomiast doświadczenia Michelsona bardzo precyzyjne wykazały, że oryentacya ziemi nie wpływa wcale na przebieg zjawisk świetlnych i elektromagnetycznych w eterze. Przebieg zatem tych zjawisk odbywa się taksamo dla obserwatora w spokoju jakoteż w ruchu prostoliniowym jednostajnym. Stąd wywnioskowano, że kształt równań obejmujących ruch jest niezależny od ruchu układu prostoliniowego. Mniej więcej 7 lat od czasu Einsteina przyjęto tę zasadę w całej fizyce. Przyczyniło się do tego ta okoliczność, że fakty dawne przedstawiają się według tej zasady prościej. Ale też wszystkie zjawiska ruchu przedstawiają się według tej zasady całkiem odmiennie niż w fizyce dawnej.

Zasadniczą tu cechą jest względność czasu. Dawniej

przyjmowano wspólny czas; w zreformowanej zasadzie przyjmuje się indywidualny czas dla różnych systemów. Można tylko określić różnice czasu dostrzeganego w jednym punkcie od czasu dostrzeganego w innym, jeśli znamy odległości i ~~[illegible]~~ tych punktów.

Zasady względności nie będziemy tutaj rozważać, bo zajęłoby nam to dużo czasu. Wspomnimy tylko, że według tej zasady jest np. czas dla stojącego człowieka inny niż dla poruszającego się. Praktycznie nie jest to dostrzegalne, bo wpływ ruchu na zmianę czasu jest ogromnie mały przy prędkościach nie zbyt wielkich. To też dla zwykłej mechaniki zasada względności ma tylko teoretyczne znaczenie, ważne zato stąd, że okazuje, że prawa Newtona są tylko przybliżeniem.

Tak więc dawniej uważano masę m za całkiem niezmienną, nie zależną ani od ruchu ani od sił. W nowej mechanice masa jest zmienna zależnie od ruchu i zmienna zależnie od sił odpowiednio do tego, czy te poprzecznie czy w kierunku promienia wodzącego na nią działają. Mamy tak dwa określenia masy:

Jeśli do masy m możemy przyczepić siły działające w kierunku stycznym, to masę określamy jako longitudinalną:

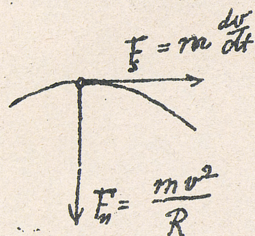


Fig 161.

$$m_l = \frac{F_s}{\frac{dv}{dt}}.$$

Jeśli natomiast siły można przyczepić w kierunku promienia krzywizny, to masę taką nazywamy transwersalną:

$$m_n = \frac{F_n}{\frac{v^2}{R}}.$$

W dawnej mechanice zakładano:

$$m_l = m_n = m$$

W nowej natomiast kładzie się:

$$m_l = \frac{m}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} \quad ; \quad m_n = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

gdzie v oznacza prędkość poruszającego się ciała, c prędkość światła. Przy małych v jest ta poprawka znikoma. Zakładając np v = 100 km/sek, c = 300 000 km/sek mamy z rozwinięcia:

$$m_n = m\left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \cdots\right]$$

jako poprawkę z członu drugiego: $\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3000}\right)^2$ tj. wielkość rzędu 10^{-7}. Ale np. przy promieniach katodowych, których prędkość β zbliża się do c różnica jest już dostrzegalna. Można dla tych promieni w szczególności stwierdzić wzór na m_n. Umieszcza się w tym celu promienie katodowe w polu magnetycznem i mierzy się krzywiznę drogi. F_n znane gdy znamy natężenie pola magnetycznego i prądu. Stąd oznacza się stosunek $\frac{e}{m}$, gdzie e oznacza nabój cząstki m. Stąd wynika zmienność m. Pierwszego natomiast wzoru na m_e nie zdołano dotychczas stwierdzić. (Doświadczenia Kaufmanna, Büscherera Hupki).

Wobec tych faktów zmienia się oczywiście cała mechanika: np. prawo składania sił nie jest ściśle ważne; jest tylko przybliżeniem. Dochodzi się wogóle do wyników bardzo dziwnych, nawet prędkości nie wolno składać w sposób zwykły. Okazuje się, jeśli się składa prędkości, to nigdy nie można otrzymać na wypadkową większej prędkości

niż prędkość światła. Rozważania te wchodzą już do zakresu teoryi elektromagnetycznej.

Praktyczne zagadnienia mechaniki mogą pozostać w dawnej formie.

Tak wyczerpaliśmy materyał mechaniki punktu i mechaniki ciał sztywnych. Przejdziemy zaś w dalszym ciągu do mechaniki ciał sprężystych.

Mechanika ciał sprężystych.

Rozważanie ciał sprężystych stanowi dalszy ciąg stopniowych przybliżeń. Powiedzieliśmy na samym początku, że gdy obserwujemy ciało niebieskie kolosalnie odległe, to będzie ono dla nas punktem. Pod uwagę bierzemy tu tylko ruch środka masy; ruchy obrotowe nie mają zazwyczaj nań wpływu. Jeśli interesują nas też ruchy obrotowe, to należy to już do zakresu mechaniki ciał sztywnych. Jeśli zaś bierzemy pod uwagę deforma-

macye ciała, to rozważania te stanowią treść mechaniki ciał sprężystych.

Trzy te stopnie przybliżeń stosują się np. do opisu ruchu ziemi. Ziemię będziemy uważać za punkt, gdy chodzić nam będzie o jej ruch koło słońca, za ciało sztywne, gdy zważamy jej ruch obrotowy koło osi, zaś za ciało sprężyste, gdy uwzględnimy przypływ i odpływ morza, zjawiska geologiczne takie jak np. że Norwegia od czasów stopienia lodów skutkiem ubytku stamtąd wielkiej ilości masy podniosła się o 300m itp. Wogóle ziemia posiada sprężystość taką jak stal.

Ciała wogóle możemy podzielić na dwie klasy: na ciecze i ciała sprężyste:

Ciecz jest to ciało, które nawet pod działaniem choćby najmniejszej siły stycznej do powierzchni jest wprawione w ruch. Aby w cieczy istniała równowaga muszą siły być normalni do powierzchni cieczy.

Ciała sprężyste wytrzymują siłę styczną, jeśli ona nie jest zbyt duża, nie nabywają ruchu i utrzy-

mują stan równowagi.

Napięcie (natężenie, prężność, ciśnienie). Wyobraźmy sobie wewnątrz ciała jakibądź przekrój. Nazywamy napięciem taką siłę, jaką trzeba przyczepić na każdej jednostce przekroju, aby ciało zostało w równowadze. Przykład: Obciążmy nitkę kauczukową ciężarkiem P. Co tu będzie napięciem? Wyobraźmy sobie, że nitkę przecinamy. Skutkiem tego górna jej część skurczyłaby się. Aby to nie nastąpiło, trzeba w tym przekroju przyczepić pewną siłę = napięcie. Jeśli nitka jest bardzo cienka i lekka, to napięcie stanowi tu siła P.



Fig 162

Wydłużenie. Możnaby się spytać, jaki wpływ ma siła na zmianę długości ciała, czyli wydłużenie. Hipotetycznie można powiedzieć, że długość ciała zależy od siły tj.:

$$l = f(P)$$

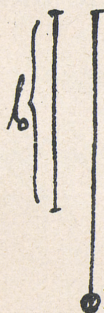


Fig 163.

Funkcyę tę uważamy za ciągłą (natura

non facit saltus) i możemy tedy, stosując rozwinięcie Maclaurina napisać:

$$l = f(0) + P\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_0 + \frac{P}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\right)_0 + \cdots$$

Ograniczając się do wydłużeń małych i odrzucając składniki dalsze, dostajemy:

$$l = f(0) + P\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_0$$

Stałą $f(0)$ wyznaczymy z warunku, że dla $P=0$ jest $l=l_0$. Stąd:

$$l = l_0 + P\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_0$$

Co do czynnika $\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_0$ postawimy pewne hipotezy, a mianowicie:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_0 = \frac{l_0}{qE}$$

przez co chcemy powiedzieć, że wydłużenie przy jednakowych siłach jest proporcjonalne do długości a odwrotnie proporcjonalnie do przekroju. E oznacza współczynnik tzw. moduł Jounga. Stąd dostajemy:

$$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{P}{qE}$$

Jest to zasadnicze prawo teoryi sprężystości, wypowiedziane przez Hooke'a 1676: ut tensio sic vis. Prawo to jest ważne dla odkształceń bardzo małych, mówimy, że stosuje się ono w granicach sprężystości. Powiedzenie takie jest ogromnie niedokładne, bo granic takich właściwie niema.

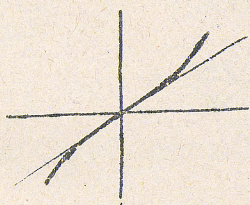


Fig 164.

Graficznie prawo Hooka przedstawi się mniej więcej tak jak wskazuje fig 164, przyczem bezwzględna wartość modułu wydłużeń i skróceń jest ta sama. Różnica zachodzi tylko co do znaków. Teoryę sprężystości starano się poprawić przez uwzględnienie wyższych potęg szeregu Maclaurina, ale nic uzyskano na tej drodze lepszego. Teorya poprzestająca na pierwszym członie daje pierwsze przybliżenie, ale jest ona tu jeszcze najlepsza.

Moduł E określa się według wzoru jako $\frac{kg}{mm^2}$. Dla stali jest np. $E = 20000 \frac{kg}{mm^2}$ tzn. drut stalowy o przekroju $q = 1mm^2$ obciążony 20000 kg wydłuży się o pierwot-

ną swą długość. De facto możliwe jest wydłużenie drutu stalowego: $\frac{l'-l}{l} = \frac{200}{20000} = 1\%$ i przerwanie jeszcze nie nastąpi. Moduł E ma zastosowanie techniczne. Dla celów fizyki określa go się w systemie (cgs). Aby z określenia technicznego przejść do (cgs), trzeba oczywiście wielkość techniczną modułu pomnożyć przez:

$$10^3 . 980 . 10^2 \sim 10^8 .$$

Dostanie się wtedy na E stosunek: $\frac{dyny}{cm^2}$.

Szkło ma $E = 7000$, ołów $1900 \frac{kg}{mm^2}$.

Dotąd rozważaliśmy wydłużenie jakiegoś drutu tak, jakoby napięcie w każdym przekroju było jednakowe. W ogólności tak jednak nie jest. Aby więc módz rozważać ten wypadek, gdy napięcie nie jest jednostajne, dążymy do praw elementarnych. Dla elementarnych rozmiarów stosowalne są prawa, jak gdy napięcie jest jednostajne. Tak więc przez prawa elementarne dojdziemy do zjawiska ogólnego, które uważać będziemy za złożone ze zjawisk elementarnych.

Uważajmy w drucie, który poddany wydłu-

żenie, element dx. Po wydłużeniu element ten wynosić będzie: $(x'+u')-(x+u)$. Stąd:

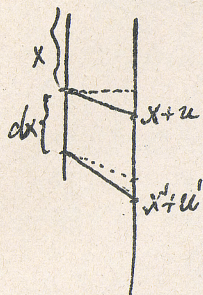


Fig 165.

$$\frac{(x'+u')-(x+u)-dx}{dx} = \frac{(x'-x)-dx+(u'-u)}{dx} =$$

$$= \frac{du}{dx}$$

gdzie wychylenie punktów:

$$u = f_c(x).$$

Stosując prawo Hooke'a mamy:

$$\frac{du}{dx} = \frac{F}{qE} = \frac{f}{E}$$

jeśli przez f oznaczymy napięcie jednostkowe t.j. przypadające na jednostkę powierzchni przekroju.

Teraz możemy już to prawo różniczkowe stosować nawet do wypadków, gdy napięcie f nie jest dla wszystkich elementów jednakowe.

W razie gdy napięcie owo jest jednakowe dla wszystkich elementów, to wracamy do dawnego prawa. Mamy wtedy:

$$u = \frac{f}{E}\cdot x + Const$$

$$u_{x=l_0} = l-l_0 = \frac{f}{E}l_0$$

Urzeczywistnienie napięcia niejednakowego napotyka-

my choćby w wypadku, gdy uwzględnimy sam ciężar nitki. Napięcie wzrasta proporcjonalnie do masy:

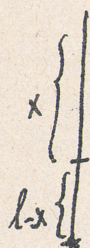


Fig 166

$$f = g\rho(l-x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f}{E} = \frac{g\rho(l-x)}{E}$$

$$u = \frac{g\rho}{E}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

Wydłużenie końcowe: $u_l = \frac{g\rho}{E}\frac{l^2}{2}$ tj

$$\frac{l-l_0}{l_0} = \frac{g\rho l_0}{2E}$$

Zatem wydłużenie jest takie jakgdybyśmy połowę masy przyczepili przy końcu.

Podobnie można ten wypadek niejednostajnego napięcia urzeczywistnić, wyobrażając sobie, że drut wiruje. Siła odśrodkowa spełniać tu będzie funkcyę napięcia.

Zauważyć tu trzeba dla ścisłości, że nie powinno się pisać właściwie: $l-x$ na oznaczenie kawałka nitki branego pod uwagę bo l się wydłuża samo. Wielkość jednak wydłużenia jest wyższego rzędu w porównaniu do l tak, że możemy ją opuścić.

Deformacye kostki elementarnej.

a) Sprężystość objętościowa. Pomyślmy sobie z ciała sprężystego wyciętą kostkę o długości boków a cm. i wyobraźmy sobie siły ciągnące na nią wywierane np. w kierunku osi x. Będą to siły X_x.

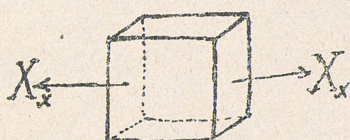


Fig 167

Siły X_x (normalne do ścian kostki) powodują wydłużenie kostki. Procentowe takie wydłużenie (na jednostkę długości) wynosi w myśl prawa Hooke'a:

$$\frac{a'-a}{a} = \frac{X_x}{E}$$

(X_x siła działająca na jednostkę powierzchni). Równocześnie z wydłużeniem kostki w jednym kierunku następuje skurczenie w innych kierunkach. Kurczenie to jest mniejsze. Wprowadzając czynnik Poissona μ wyrazimy je w każdym z dwu pozostałych kierunków:

$$a - \mu(a'-a) = a\left(1 - \mu\frac{X_x}{E}\right)$$

Pod wpływem siły X_x kostka elementarna zmieni swoją objętość $Vol_0 = a^3$ na Vol'.

$$Vol' = a\left(1+\frac{X_x}{E}\right) a\left(1-\mu\frac{X_x}{E}\right) a\left(1-\mu\frac{X_x}{E}\right)$$

$$= a^3\left[1 + (1-2\mu)\frac{X_x}{E} + \left(\frac{X_x}{E}\right)^2 + \dots\right]$$

Opuszczając składniki od $\left(\frac{X_x}{E}\right)^2$ począwszy jako wielkości wyższego rzędu dostajemy:

$$Vol' = Vol_0\left[1+(1-2\mu)\frac{X_x}{E}\right]$$

czyli

$$\frac{Vol' - Vol_0}{Vol_0} = (1-2\mu)\frac{X_x}{E}$$

Dla $\mu < \frac{1}{2}$ objętość się powiększa. W istocie μ jest zawsze $< \frac{1}{2}$; dla kauczuku, żelatyny μ ma prawie wartość $\frac{1}{2}$. Ogólnie czem większa sztywność postaciowa, tem μ jest mniejsze. Zbadać to można drogą Wertheima. Czynnik μ znajdzie się tu przez pomiary obniżenia cieczy zawartej w rurze, w której wydłużamy drut zapomocą odpowiedniego systemu dźwigniowego. Tak znalazł Wertheim wartość $\mu = \frac{1}{3}$. W istocie

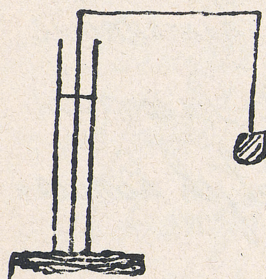


Fig 168

wartości tego czynnika μ zawarte są w granicach 0·1...0·5.

Na tych podstawach zbudowano całą teoryę sprężystości. Początki pochodzą od Hooke'a, teoryę ogólną wypracowali Navier i Poisson (1820). Punktem ich wyjścia było pojęcie molekułu, drobiny. Podstawę tę potem wyeliminowano z teoryi. Według Naviera i Poissona $\mu = \frac{1}{4}$, natomiast według $\mu = \frac{1}{3}$. Sprzeczność tę rozstrzygnięto w ten sposób, że μ jest indywidualne, zależne od natury odkształcanego ciała.

W teoryi Poissona i Naviera było założenie, że siły międzydrobinowe są centralne. Byłoby to wtedy słuszne, gdyby molekuły miały kształt kul. Nie można atoli tego przesądzać i założenie to jako zaciasne trzeba z teoryi usunąć. Tak samo trzeba postąpić z założeniem Naviera i Poissona, że molekuły są stałe. Mogą one bowiem poruszać się.

Obecnie opieramy się przy wyprowadzeniu teoryi sprężystości na następujących datach doświadczalnych:

1° Okształcenie jest proporcyonalne do siły P.

2° Jeśli odkształcenie jest skutkiem kilku sił (równa

czesnych) to jest ono superpozycyą odkształceń sił poszczególnych.

Zasada superpozycyi odkształceń jest hipotetyczna. Wynika ona w razie wydłużeń w tym samym kierunku skierowanych z prawa Hooke'a, i naodwrót prawo Hooke'a wynika z niej jako szczególny przypadek. Możemy bowiem tak rozumować, jeśli prawo Hooke'a jest ważne, to drut obciążony np. jednym kilogramem wydłuży się o ε, skutkiem zaś obciążenia 2 kilogramami wydłuży się o 2ε. Ale przyjmując zasadę składania sił, mamy już co ipso zasadę składania odkształceń; istotnie, to powiada, że drut pod wpływem każdego z 2 kilogramów niezależnie się wydłużając o ε, ma w całości wydłużyć się o 2ε.

Naodwrót przyjmijmy teraz, że wydłużenie nie następuje według prawa Hooke'a lecz według innego prawa np.

$$\frac{du}{dx} = \frac{p}{E} + ap^2$$

$$\frac{du'}{dx} = \frac{p'}{E} + a p'^2$$

Superpozycya tych odkształceń daje:

$$\frac{d(u+u')}{dx} = \frac{p+p'}{E} + a(p^2+p'^2)$$

To jednak nie da się nakreślić tak jak wyżej wypowiedziane prawo superpozycyi.

Prawo superpozycyi jest ogólniejszą zasadą niż prawo Hooke'a, gdyż stosuje się do deformacyi różnych rodzajów.

Wyżej wyprowadziliśmy wzór na deformacyę objętościową kostki elementarnej o boku a pod wpływem siły normalnej X_x działającej w kierunku osi x. Niech teraz na tę kostkę działają jeszcze inne siły normalne Y_y, Z_z, odkształcając ją, przyczem jednak kostka ma zostawać w równowadze. Skutkiem tego ostatniego warunku wszystkie wspomniane siły muszą być równe co do wielkości bezwzględnej, $= p$. Pod wpływem jednej z nich odkształcenie kostki przedstawia się:

$$\frac{Vol' - a^3}{a^3} = \frac{p}{E}(1-2\mu)$$

Pod wpływem zaś wszystkich trzech na mocy prawa superpozycyi deformacya objętościowa kostki przedstawi się oczywiście:

$$\frac{a'^3 - a^3}{a^3} = \frac{3p}{E}(1-2\mu)$$

Wprowadzając moduł objętościowy (Volumenmodul):

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

możemy odkształcenie objętościowe kostki wyrazić:

$$\frac{a'^3 - a^3}{a^3} = \frac{p}{K}.$$

Analogiczny wzór mamy w hydrodynamice na zmianę gęstości cieczy pod wpływem ciśnienia:

$$\rho = \rho_0 [1 + p\sigma].$$

Różnica polega w tem, że przy odkształceniu objętościowem kostki mówiliśmy o ciągnieniu, tu zaś mówimy o ciśnieniu; powoduje to zmianę znaku tj: $p\sigma = -\frac{p}{K}$

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{p}{K}\right]$$

gdzie ściśliwość $\sigma = \frac{1}{K}$. Ponieważ jak widzieliśmy, E jest wielkością 4^go^ rzędu, gdy bierzemy pod uwagę stosunek $\frac{Kg}{mm^2}$, lub 6^go^ rzędu, gdy uważamy stosunek $\frac{Kg}{cm^2}$, i ponieważ oczywiście K jest tego samego rzędu, więc ściśliwość σ ciał stałych jest bardzo mała, rzędu 10^{-6}. Ściśliwość cieczy jest nieco większa $\sigma \sim 10^{-5}$.

Pod wpływem rozważanych dotąd odkształceń zmienia się tylko objętość kostki, kształt nie. Stąd też pochodzi nazwa deformacya objętościowa, a sprężystość przy niej występującą nazywamy objętościową.

b) Sprężystość postaciowa. Weźmy teraz pod uwagę siły, które działają w kierunkach stycznych do ścian kostki elementarnej. Będą to siły np. X_y, Y_x. Jeśli ma być równowaga, to trzeba założyć, że siły te są równe i nadto, że doczepione są siły X_y', Y_x' równe sobie i poprzednim, znoszące moment wytworzony przez siły X_y, Y_x.

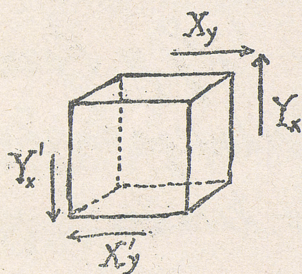
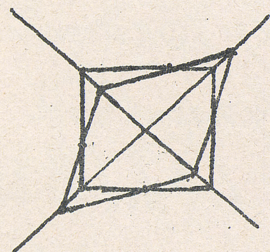


Fig 169.

Mamy więc tutaj system sił, równych co do bezwzględnej wartości, = p. Jaki skutek tego systemu sił?

Nastąpi wydłużenie kostki, jak to wskazuje przekrój kostki Fig 170, w kierunku jednej przekątni, skurczenie zaś w kierunku drugiej. Ponieważ przy takiem odkształceniu zmieniają się


Fig 170.

[illegible]ty, więc te [illegible] charakteryzować to odkształcenie. [illegible] deformacji postaciowej można sprowadzić [illegible] deformacji objętościowej. Wystarczy w tym celu wykreślić na uważanym przekroju nowy kwadrat opisany na poprzednim o bokach prostopadłych do przekątni poprzedniego i siły p styczne do boków poprzedniego kwadratu porozkładać normalnie do boków kwadratu wprowadzonego. Każda ze sił składowych wynosić będzie oczywiście $\frac{p}{\sqrt{2}}$. Można je teraz będzie składać w sposób inny: równolegle, co dwie razem.



Fig 171.

Można więc będzie powiedzieć, że na boki tego nowego kwadratu działać będą siły normalne $2\frac{p}{\sqrt{2}} = p\sqrt{2}$. Jeśli bok kostki pierwotnej oznaczyliśmy a, to bok wprowadzonego kwadratu wynosić będzie oczywiście $a\sqrt{2}$.

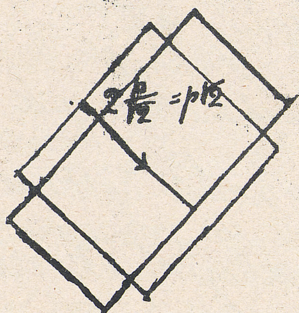


Fig 172

Siła przypadająca zatem na jednostkę wynosić będzie:

$$\frac{p\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{p}{a}$$

Kwadrat nowy zdeformuje się w sposób podany na rycinie tj. jedne boki wydłużą się, inne się skrócą.

Skutkiem siły ciągnącej wydłużenie będzie $\frac{p}{E}$, skurczenie zaś $\mu \frac{p}{E}$. Wartości zatem odkształcenie skutkiem siły ciągnącej będzie:

$$\varepsilon = \frac{p}{E} + \mu \frac{p}{E} = \frac{p}{E}(1+\mu).$$

Takiesame będzie oczywiście odkształcenie skutkiem siły cisnącej.

Lecz boki zdeformowanego kwadratu przedstawiają przekątnie nowego pierwotnego przed tym kostki odkształcowej przez siły p. Odkształcone te przekątnie wynosić będą:

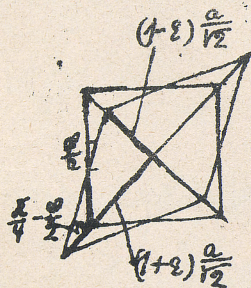


Fig 173.

$$(1-\varepsilon)\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$(1+\varepsilon)\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Wracając tedy do odkształcenia postaciowego powiemy:

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{(1-\varepsilon)\frac{a}{\sqrt{2}}}{(1+\varepsilon)\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg\frac{\pi}{4}tg\frac{\varphi}{2}}=\frac{1-tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg\frac{\varphi}{2}}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$ Stąd

$$tg\frac{\varphi}{2}=\varepsilon$$

Ponieważ zaś φ oznacza kąt ogromnie mały, bo wogóle odkształcenia tylko bardzo małe rozważamy, przeto możemy położyć:

$$\frac{\varphi}{2}=\varepsilon$$

$$\varphi=2\varepsilon$$

czyli

$$\varphi=\frac{2(1+\mu)}{E}\cdot p$$

Wprowadzając zaś symbol T jako moduł skręcenia (Torsionsmodul)

$$T=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

możemy odkształcenie postaciowe kostki elementarnej wyrazić

$$\varphi=\frac{p}{T}$$

Zestawiając wzory na wydłużenie, odkształcenie objętościowe, odkształcenie postaciowe, widzimy stałe:

Odkształcenie $\backsim \frac{p}{E}, \frac{p}{K}, \frac{p}{T}$.

Przy odkształceniu postaci objętość kostki zostanie niezmieniona. Widać to bez rachunku. Efekt bowiem przy nieskończenie małem ścięciu się kostki będzie ten, że ściany boczne nachylą się, podstawy zaś zostaną niezmienione. Górna tylko podstawa przesunie się równolegle do swej pierwotnej pozycyi. Wysokość zdeformowanej kostki będzie taka sama.

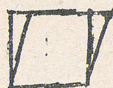


Fig 174.

Dotychczas rozważaliśmy odkształcenie kostki elementarnej przy założeniu równowagi i równości sił. Ograniczenie to jednak łatwo usunąć i wszystkie wogóle wypadki można zredukować do tutaj rozważonych.

Zakładając więc, że siły ciągnące X_x, Y_y, Z_z są różne, że więc skutkiem nich kostka nie będzie już dalej zostawać w równowadze, dostaniemy na odkształcenie objętości w kierunku x wzór:

$$\varepsilon_x = \frac{X_x}{E} - \mu\frac{Y_y}{E} - \mu\frac{Z_z}{E}.$$

Istotnie bowiem w kierunku x nastąpi wydłużenie kostki skutkiem siły X_x, skurczenie zaś skutkiem dwu

sił pozostałych Y_y, Z_z. Podobnie wyrazimy odkształcenia ε_y, ε_z. Tak więc dostaniemy na odkształcenie objętościowe kostki następujące ogólne wzory:

$$\varepsilon_x = \frac{X_x}{E} - \frac{\mu}{E}(Y_y + Z_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{Y_y}{E} - \frac{\mu}{E}(Z_z + X_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{Z_z}{E} - \frac{\mu}{E}(X_x + Y_y).$$

Kąty kostki nie ulegną oczywiście pod wpływem sił X_x, Y_y, Z_z żadnym zmianom.

Odpowiednie uogólnienia dadzą się wzory na ścinanie kostki przy odrzuceniu warunku równowagi. Możemy przytem zakładać, że istnieją jakieś siły zewnętrzne, działające na elementy objętościowe wewnątrz ciała np. grawitacja. Siły takie powodują tylko ruch postępowy. Jeśli rozważamy zatem możliwość ruchów obrotowych kostki

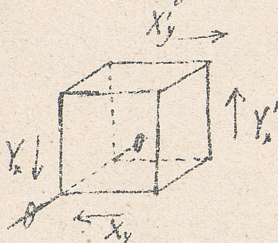


Fig 175.

koło krawędzi OO jako osi to otrzymujemy równanie ruchu:

$$\rho\, dx\,dy\,dz \left(Y\frac{dx}{2} - X\frac{dy}{2}\right) + Y_x' dy\,dz\,dx - X_y'\,dx\,dy\,dz = K_z \frac{d\varphi}{dt^2},$$

gdzie pierwszy człon pochodzi od sił zewnętrznych, działa-

jących z natężeniem XYZ na jednostkę masy i przyczepionych w środku kostki, drugi i trzeci człon pochodzi od natężeń stycznych działających na powierzchnię kostki, a K_2 oznacza moment bezwładności kostki elementarnej tj wielkość rzędu $dx\,dy\,dz\,dx^2$.

Jeśli $\frac{d\omega}{dt}$ ma być wielkością skończoną tj ściśle ruch wzbudzony ma być skończenie prędki to wobec tego, że pierwszy człon równania jest wielkością 4^{go} rzędu, a K_2 jest wielkością 5^{go} rzędu, możemy te oba człony wobec wielkości niższych rzędów pominąć tak, że dzieląc całe równanie przez $dx\,dy\,dz$ dochodzimy do równości

$$Y'_x = X_y$$

ważnej ściśle w przypadku granicznym $\lim dx\,dy\,dz = 0$.

Analogicznie mamy:

$$Y_x = X_y \quad \text{itd.}$$

Tj dochodzimy do wniosku, że nawet w ogólnym wypadku wystarczy tylko trzy różne gatunki sił stycznych ścinających kostkę uwzględnić, innemi słowy, że siły jednego przekroju kostki elementarnej należy uważać za równe (z pominięciem nieskończenie małych różnic) co do bezwzględnej wartości (Fig 176.) Mając to łatwo już możemy przejść do wzorów ogólnych na ścinanie kostki.

Są one:

$$\varphi = \frac{Y_z}{T} = \frac{Z_y}{T}$$

$$\psi = \frac{Z_x}{T} = \frac{X_z}{T}$$

$$\chi = \frac{X_y}{T} = \frac{Y_x}{T}$$

Objętość kostki przy założeniu odkształceń postaciowych bardzo małych jest niezmieniona.

Deformacye ciała dowolnego kształtu.

Każde ciało możemy sobie złożyć z elementów w kształcie kostek. Jeśli ciało doznaje odkształcenia to każda kostka elementarna doznaje również odkształcenia. Z tych odkształceń elementarnych składamy odkształcenie całego ciała. Jeśli każda z kostek elementarnych ciała doznaje odkształcenia takiego samego to odkształcenie ciała nazywamy jednorodnem; ogólniejszy jest wypadek gdy nie każda kostka doznaje takiego samego odkształcenia. Mamy wtedy do czynienia z odkształceniem niejednorodnem.



Fig 177

Ażeby odrazu przez z ogólnego stanowiska traktować, zauważymy, że odkształcenie niejednorodne

da się zredukować do jednorodnego. Ażeby słuszność tego powiedzenia wykazać, wystarczy udowodnić, że deformacye w nieskończenie małej przestrzeni można uważać w pierwszem przybliżeniu za jednorodną.

Uważajmy w tym celu punkt xyz i jego punkt sąsiedni $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$. Po deformacyi pozycya pierwszego punktu będzie określona przez spółrzędne:

$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z$$

zaś drugiego przez:

$$x+\xi+\Delta x+\Delta\xi$$

$$y+\eta+\Delta y+\Delta\eta$$

$$z+\zeta+\Delta z+\Delta\zeta$$

xyz — $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$

$x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ — $x+\xi+\Delta x\ldots$, $y+\eta+\Delta x\ldots$, $z+\zeta+\Delta z\ldots$

Fig 178.

gdzie ξ, η, ζ są funkcyami pewnemi zmiennych x, y, z. Stosując rozwinięcie na szereg Taylora możemy napisać:

$$x+\xi+\Delta x+\Delta\xi = x+\xi+\Delta x+\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\xi}{\partial z}\Delta z$$

$$y+\eta+\Delta y+\Delta\eta = y+\eta+\Delta y+\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\eta}{\partial z}\Delta z$$

$$z+\zeta+\Delta z+\Delta\zeta = z+\zeta+\Delta z+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Delta z$$

Składniki wyższych rzędów opuszczamy.

Lewe strony są w dalszym ciągu odpowiednio:

$$= x + \xi + \left[\Delta x \left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + \Delta y \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial \xi}{\partial z} \right.$$

$$= y + \eta + \left[\Delta x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Delta y \left[1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right] + \Delta z \frac{\partial \eta}{\partial z} \right.$$

$$= z + \zeta + \left[\Delta x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \Delta z \left[1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right] \right.$$

Przy deformacyach chodzi nam tylko o wzajemne położenie punktów. Zmiany wzajemnych położeń określone są ostatniemi członami odkreślonemi. Są to wyrażenia liniowe; wnioskujemy stąd, że deformacye są jednorodne.

Z deformacyj tych jednorodnych w nieskończenie małych obszarach składamy teraz deformacyę całkowitą ciała, która w ogólnym wypadku będzie niejednorodna.

W myśl tej uwagi rozpatrywać nam wystarczy tylko deformacye jednorodne, bo w każdej chwili możemy z nich przejść do niejednorodnych.

Czem się charakteryzuje analitycznie odkształcenie jednorodne? Punkt xyz przyjmie po odkształ-

ceniu pozycyę: $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Odkształcenia przytem występujące, znaczyliśmy je wyżej str. 289: du, naznaczymy tu $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Jeśli odkształcenie ma być jednorodne, to muszą cząstkowe pochodne wydłużeń kostek elementarnych być wielkościami stałemi. Gdyby bowiem one miały w uważanej przestrzeni wartości zmienne, to świadczyłoby to, że wydłużenia są nierównomierne w uważanym kierunku; zatem odkształcenie nie byłoby jednorodne. Mamy stąd następujący system równań różniczkowych cząstkowych:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_1 & \frac{\partial \xi}{\partial y} = a_2 & \frac{\partial \xi}{\partial z} = a_3 \\
\frac{\partial \eta}{\partial x} = b_1 & \frac{\partial \eta}{\partial y} = b_2 & \frac{\partial \eta}{\partial z} = b_3 \\
\frac{\partial \zeta}{\partial x} = c_1 & \frac{\partial \zeta}{\partial y} = c_2 & \frac{\partial \zeta}{\partial z} = c_3
\end{array}
\right\} \quad (a)
$$

System ten można bezpośrednio scałkować: Mamy:

$$
\begin{aligned}
\xi &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\
\eta &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\
\zeta &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \, ,
\end{aligned}
$$

gdzie ξ, η, ζ oznaczają przesunięcia punktów, a_0, b_0, c_0 stałe całkowania. Dobierając odpowiednio początek układu tak żeby stałe całkowania znikły, mamy rozwiązanie systemu równań różniczkowych w formie:

$$\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z$$
$$\eta = b_1 x + b_2 y + b_3 z$$
$$\zeta = c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

czyli wobec tego, że $\xi = x' - x$, $\eta = y' - y$, $\zeta = z' - z$, mamy na współrzędne punktu po odkształceniu następujące wartości:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \xi = (1+a_1)x + a_2 y + a_3 z \\ y' &= y + \eta = b_1 x + (1+b_2) y + b_3 z \\ z' &= z + \zeta = c_1 x + c_2 y + (1+c_3) z \end{aligned}\right\} (b)$$

Współrzędne więc punktu po odkształceniu wyrażają się liniowo przez współrzędne punktu przed odkształceniem. Stąd wniosek geometryczny, że proste w uważanem ciele przejdą po deformacyi znowu w proste, płaszczyzny znowu w płaszczyzny; zmienią one tylko kąt nachylenia.

Kula przejdzie wogólności na elipsoidę. Stopień tworu geometrycznego będzie zachowany.

Zapytamy teraz jaki rodzaj odkształcenia przedstawiają te równania.

Rozważymy, co się dzieje z punktami na osiach xyz.

Gdy założymy $x=0, y=0, z=0$, to $x'=0, y'=0, z'=0$.

Gdy założymy: $y=0, z=0$, to weźmiemy pod uwagę punkty osi x. Dostajemy na ich współrzędne po deformacji wartości:

$$x' = (1+a_1)x$$
$$y' = b_1 x$$
$$z' = c_1 x \; .$$

Równania te powiadają, że każdy z punktów leżących pierwotnie na osi x doznał 1° przesunięcia w kierunku osi x 2° odchylił się ku osi y oraz osi z, a b_1 i c_1 podają tg kątów mierzących owe odchylenie.

Gdy założymy $x=0$, $z=0$, to weźmiemy pod uwagę punkty osi y. Dostajemy na ich współrzędne po deformacji wartości:

$$x' = a_2 y$$
$$y' = (1+b_2)y$$

$z' = c_2 y'$

Równania te powiadają, że każdy z punktów leżących pierwotnie na osi y doznał 1° przesunięcia w kierunku osi y 2° odchylił się ku osi x oraz osi z, zaś a_2, c_2 podają tg kątów mierzących owe odchylenie. Jeśli odetniemy na osiach x i y boki kwadratu, będącego przekrojem kostki, to boki te w myśl poprzednich wywodów nachylą się po deformacyi o kąty μ i ν do osi x i y;

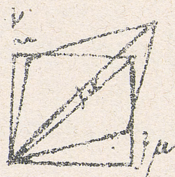


Fig 178

i o pewne kąty do osi z, czego nie bierzemy pod uwagę, bo chodzi nam o przekrój w jednej płaszczyźnie. Widzimy już stąd odrazu że równania owe przedstawiają deformacyę zginania (skrętu). W szczególności, gdybyśmy założyli μ = ν, mielibyśmy wypadek poprzed już rozważony (fig 99), gdzie kąt skręcenia wynosił $\frac{\varphi}{2}$. Tutaj atoli z założenia ogólnego, że tg nachyleń osi po deformacyi do osi pierwotnych są różne, mamy też wniosek ogólny, że też kąty nachyleń μ i ν są różne.

Zauważymy tu jeszcze że przekątnia uważanego kwadratu dozna prócz wydłużenia obrotu pewnego o kąt jak łatwo wyrozumować sobie $x = \frac{\mu-\nu}{2}$.

Równania (b) przedstawić możemy jeszcze tożsamościowo w innej formie:

$$
\begin{aligned}
x' &= x(1+a_1) + \frac{b_1+a_2}{2}y + \frac{a_3+c_1}{2}z + \frac{a_3-c_1}{2}z - \frac{b_1-a_2}{2}y \\
y' &= y(1+b_2) + \frac{c_2+b_3}{2}z + \frac{b_1+a_2}{2}x + \frac{b_1-a_2}{2}x - \frac{c_2-b_3}{2}z \\
z' &= z(1+c_3) + \frac{a_3+c_1}{2}x + \frac{c_2+b_3}{2}y + \frac{c_2-b_3}{2}y - \frac{a_3-c_1}{2}x
\end{aligned}
$$

czyli wprowadzając skrócenia:

$$
\alpha = \frac{c_2-b_3}{2}, \quad \beta = \frac{a_3-c_1}{2}, \quad \gamma = \frac{b_1-a_2}{2}
$$

$$
\varphi = c_2+b_3, \quad \psi = a_3+c_1, \quad \chi = b_1+a_2
$$

w formie:

$$
\left.
\begin{aligned}
x' &= x(1+a_1) + \frac{\chi}{2}y + \frac{\psi}{2}z + \beta z - \gamma y \\
y' &= y(1+b_2) + \frac{\varphi}{2}z + \frac{\chi}{2}x + \gamma x - \alpha z \\
z' &= z(1+c_3) + \frac{\psi}{2}x + \frac{\varphi}{2}y + \alpha y - \beta x
\end{aligned}
\right\} \quad (c)
$$

W kształcie (c) możemy już z łatwością odróżnić trzy

części, z których pierwsza pochodzi z wydłużeń występujących wskutek deformacyi, druga ze zmiany kątów, trzecia z obrotu - bo przedstawia ona przecież przesunięcia wywołane obrotem nieskończenie małym spotykane już w mechanice ciał sztywnych.

Jakie siły powodują owe deformacye? Obroty nie są bezpośrednim skutkiem sił sprężystych; siły sprężyste powstają skutkiem deformacyi względnych, a więc tylko skutkiem składników pierwszych. Wystarczy więc oddzielnie rozpatrzyć siły powodujące składniki pierwsze i wtóre.

Wydłużenia powodują, jak wiemy siły: X_x, Y_y, Z_z; jest bowiem:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{X_x}{E} - \mu\,\frac{Y_y+Z_z}{E} \\ b_2 &= \frac{Y_y}{E} - \mu\,\frac{X_x+Z_z}{E} \\ c_3 &= \frac{Z_z}{E} - \mu\,\frac{X_x+Y_y}{E} \end{aligned}\right\} \quad (\partial)$$

Skręcenie powodują znowu, jak wiemy, siły: $X_y\, Y_x$, X_z, Z_x, Y_z, Z_y; jest bowiem:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{Y_z}{T} = \frac{Z_y}{T} \\ \psi &= \frac{Z_x}{T} = \frac{X_z}{T} \\ \chi &= \frac{X_y}{T} = \frac{Y_x}{T} \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Z szeciu równań (d) i (e) można by wyrazić przez wielkości pozostałe. Po wykonaniu stosownych eliminacyj dostajemy np.

$$X_x = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} a_1 + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (b_2 + c_3)$$

czyli

$$X_x = \frac{E}{1+\mu} a_1 + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (a_1 + b_2 + c_3)$$

czyli przypominając sobie relację $T = \frac{E}{2(1+\mu)}$ i znacząc: $\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = L$; $a_1 + b_2 + c_3 = \Delta$. Tak dochodzimy do następujących wzorów:

$$X_x = 2Ta_1 + L\Delta$$

$$Y_y = 2Tb_2 + L\Delta$$

$$Z_z = 2Tc_3 + L\Delta.$$

Co się tyczy zaś napięć ścinających, to będzie:

$$X_y = Y_x = T\chi = T(a_2 + b_1)$$

$$Y_z = Z_y = T\varphi = T(b_3 + c_2)$$

$$Z_x = X_z = T\psi = T(c_1 + a_3).$$

Przepisując to jeszcze raz wyraźnie dostajemy wzory:

na siły zmieniające objętość ciała:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2T\frac{\partial\xi}{\partial x} + L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \\ Y_y &= 2T\frac{\partial\eta}{\partial y} + L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \\ Z_z &= 2T\frac{\partial\zeta}{\partial z} + L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} (f)$$

na siły ścinające:

$$\left.\begin{aligned} X_y = Y_x &= T\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \\ Y_z = Z_y &= T\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) \\ Z_x = X_z &= T\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} (g)$$

Są to więc napięcia sprężyste wewnątrz ciała w dowolny sposób odkształconego. Jeśli znamy:

$$\xi = f_1(xyz)$$

$$\eta = f_2(xyz)$$

$$\zeta = f_3(xyz)$$

to ze wzorów tych możemy już siły obliczyć.

Weźmy teraz pod uwagę kostkę elementarną wewnątrz ciała i przyjmijmy ogólny wypadek, że ona nie zostaje w równowadze; że jest więc w ruchu. Z tego założenia wynika, że siły X_x' X_x .... X_y' X_y .... są na ogół różne.

Jakie siły mogą działać na taką kostkę elementarną, dajmy na to, w kierunku x i jakiego udzielą jej przyspieszenia wypadkowego? Siła wyciągająca wypadkowa w tym kierunku będzie:

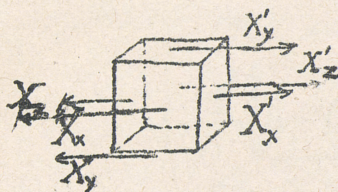


Fig 179.

$$(X'_x - X_x)\,dy\,dz$$

gdzie $dy.dz$ jest przekrojem. Wypadkowe siły ścinające będą:

$$(X'_y - X_y)\,dx\,dz \;;\; (X'_z - X_z)\,dx\,dy\,.$$

Może jeszcze działać jakaś siła zewnętrzna np. ciężkość. Będzie ona:

$$X\rho\,dx\,dy\,dz$$

gdzie ρ oznacza gęstość ciała zaś $dx\,dy\,dz$ objętość kostki elementarnej. Znacząc przyspieszenie wypadkowe w tym kierunku $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ i superponując wszystkie owe siły poprzednie, mamy równość:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,\rho\,dx\,dy\,dz = X\rho\,dx\,dy\,dz + (X'_x - X_x)\,dy\,dz + (X'_y - X_y)\,dx\,dz + (X'_z - X_z)\,dx\,dy.$$

czyli

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\rho\, dx dy dz = X\rho\, dx dy dz + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial X_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial X_z}{\partial z} dx dy dz$$

Powodując się już teraz analogią wypisujemy następujące trzy równania dynamiczne:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= Y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= Z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} (h)$$

Równania te rozpadają się widocznie na dwie części: na część Newtonowską i dodatek pochodzący od sił odkształcających.

W razie spoczynku (równowagi), przyspieszenia i siły zewnętrzne znikają i równania wtedy owe redukują się do formy:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} (i)$$

tj. zostaje tylko dodatek pochodzący od sił sprężystych.

Jeszcze jednak należy inny system sił odróżnić: odnośnie do powierzchni ciała. Niech więc powierzchnia ma w danym punkcie nachylenie xyz. Do tej powierzchni mogą być przyczepione jakieś siły. Składowe sił w kierunkach trzech osi niech będą: X_s, Y_s, Z_s.

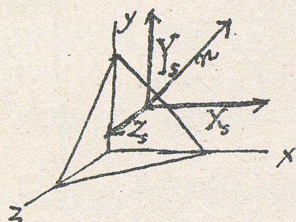


Fig 180.

Jeśli przez Δ oznaczymy powierzchnię trójkąta o wierzchołkach w punktach przecięcia się płaszczyzny stycznej do uważanej powierzchni, zaś Δ_x, Δ_y, Δ_z jego rzuty na płaszczyzny normalne do osi x, y, z, to warunek równowagi wszystkich sił działających w kierunku osi x wyrazimy równością:

$$X_s \cdot \Delta - X_x \Delta_x - X_y \Delta_y - X_z \Delta_z = 0 \quad \text{----} \quad (j)$$

skąd

$$X_s = X_x \frac{\Delta_x}{\Delta} + Y_y \frac{\Delta_y}{\Delta} + Z_z \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Niech n oznacza kierunek normalnej w uważanym punk-

cie, to $\frac{\Delta_x}{\Delta} = \cos nx$, $\frac{\Delta_y}{\Delta} = \cos ny$, $\frac{\Delta_z}{\Delta} = \cos nz$. Stąd możemy napisać równanie pierwsze i dwa następne, kierując się analogią w następującej formie:

$$\left.\begin{aligned} X_s &= X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz \\ Y_s &= Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz \\ Z_s &= Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz \end{aligned}\right\} (k)$$

Jest to system sił działających na powierzchnię jakbądź zoryentowaną. Lecz wyrażenia te udowodnione są na razie tylko dla równowagi. W razie ruchu zaś siły X_s, X_x, X_y, X_z w (j) nie równoważyłyby się, tylko wypadkowa ich równałaby się iloczynowi masy i przyspieszenia: tj trzebaby napisać:

$$X_s\Delta - X_x\Delta_x - X_y\Delta_y - X_z\Delta_z = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\cdot vol = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\, dx\,dy\,dz$$

lecz ponieważ vol jest wielkością nieskończenie małą 3go rzędu, zatem prawa strona równania znika. Przez to zaś mamy udowodnione że system sił działających (k)

na powierzchnię uważanego ciała jest też w razie ruchu ważny. Mamy tak już cały aparat matematyczny dla badania sił sprężystych, ale jest aż cztery systemy równań: (f), (g), (h), (k) w każdym po trzy równania.

Pierwsze więc trzy równania (f) określają siły ciągnące przy pomocy odkształceń $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$, modułu skręcenia T i liczby L wyrażającej się przez moduł Younga E i spółczynnik Poissona μ; drugie trzy (g) określają siły ścinające przy pomocy modułu skręcenia T i odkształceń $\frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$; trzecie trzy (h) tzw. równania dynamiczne ruchu określają przyspieszenia w zależności od sił zewnętrznych i napięć sprężystych; czwarte trzy (k) określają siły przyczepione na powierzchni ciała w zależności od sił ciągnących i cosinusów kątów nachylenia.

Teraz zostaje tylko zastosowanie tych równań. Jest to sprawa ogromnie zawiła, i to już w wypadku najprostszym, gdy budowa ciała jest izotropowa, bo już w tym razie mamy do czynienia z 12 równaniami. Wszakże zaś, gdy badamy deformacje kryształów, to sprawa jest jeszcze

zawiłsza.

Tutaj ograniczymy się do statyki, a więc stale zakładać będziemy, że przyspieszenia $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \dots$ znikają. Będziemy więc stale mieć przed oczyma takie cztery systemy równań:

$$
(I)\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0
\end{aligned} \\
\hline
(2) & \begin{aligned}
&X_s = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz \\
&Y_s = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz \\
&Z_s = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz
\end{aligned} \\
\hline
(3) & \begin{aligned}
&X_x = 2T\frac{\partial \xi}{\partial x} + L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \\
&Y_y = 2T\frac{\partial \eta}{\partial y} + L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \\
&Z_z = 2T\frac{\partial \zeta}{\partial z} + L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)
\end{aligned} \\
\hline
(4) & \begin{aligned}
&X_y = T\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\
&Y_z = T\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \\
&Z_x = T\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\end{array}
\right.
$$

Do rozwiązania poszczególnych zagadnień statyki sprężystości użyteczne jest ogólne twierdzenie Kirchhoffa, które tu bez dowodu przyjmiemy: Jeśli są dane siły działające na powierzchni: X_s, Y_s, Z_s i siły działające na wnętrze ciała X, Y, Z, to jest tylko jeden system przesunięć ξ, η, ζ, który owe równania (I) spełnia. Jest to twierdzenie wygodne o tyle, że jeśli potem znajdziemy jakimbądź sposobem jakieś rozwiązanie równań (I), to będziemy wiedzieli, że jest to rozwiązanie jedyne.

Zazwyczaj postępujemy tak: Przyjmujemy hipotetycznie jakieś funkcye ξ, η, ζ, następnie podstawiamy je do równań (I) i sprawdzamy, czy są spełnione.

Bliżej metodę tę rozpatrzymy na przykładach.

---

1. Kształt ciała nie zmienia się, deformacya polega tylko na jednostajnem skurczeniu się.



Odrazu widzimy, że zachodzić tu będą następujące wzory:

$$x' = x(1+\kappa)$$

$$y' = y(1+\kappa)$$

$$z' = z(1+\kappa)$$

stąd $\xi = \kappa x$ $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \kappa$

$\eta = \kappa y$, $\frac{\partial\eta}{\partial y} = \kappa$

$\zeta = \kappa z$, $\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \kappa$.

Wstawiając to w (3)(l), mamy:

$$X_x = (2T + 3L)\kappa = Y_y = Z_z = p$$

z (4)(l) zaś dostajemy:

$$X_y = Y_z = Z_x = 0$$

Równania dynamiczne (1)(l) są spełnione, bo oczywiście

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial X_y}{\partial y} = \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \quad \text{i td.}$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do (2)(l), mamy:

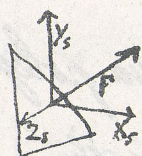


Fig 182.

$$X_s = p \cos nx$$

$$Y_s = p \cos ny$$

$$Z_s = p \cos nz$$

Znaczy to, że na element powierzchni działają siły X_s, Y_s, Z_s które równają ~~się~~ ~~ciśnieniu~~ siły wypadkowej

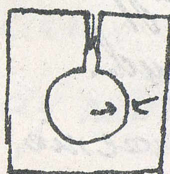
T normalnej do powierzchni w uważanym punkcie. Zatem deformacya polegająca na jednostajnem skurczaniu się powstanie wtedy, jeśli nie działają żadne siły wewnętrzne prócz ciągnących normalnie, przyczem te ostatnie muszą być jednakowe (ciągnienie hydrostatyczne). Czy nastąpi skurczanie czy powiększanie objętości, to zależy od znaku czynnika κ. Niech $\theta = 3\kappa$,

$$\kappa = \frac{p}{2T+3L}\,, \qquad \theta = \frac{3p}{2T+3L}$$

Wobec $T = \frac{E}{2(1+\mu)}$, $L = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ jest:

$$\theta = \frac{3p}{\frac{E}{1+\mu}\left\{1+\frac{3\mu}{1-2\mu}\right\}} = \frac{p}{\frac{E}{3(1-2\mu)}} = \frac{p}{K}\,.$$

Jest to wzór, który już wyżej (str. 296) wyprowadziliśmy na odkształcenie objętościowe kostki.


Fig 183

Odkształcenie niejednorodne natomiast nastąpi np. gdy pompą Cailleteta rozprzedzimy ciecz w naczyniu zamkniętem a zewnątrz będzie panować ciśnienie inne. Wielkość odkształcenia zależy oczywiście od różnicy ciśnie-

nia jakie panuje wewnątrz i zewnątrz.

W prosty sposób da się rozwiązać specyalny wypadek takiego odkształcenia niejednorodnego mianowicie zagadnienie jak zdeformuje się walec wydrążony, na którego powierzchnie wywarte są ciśnienia p_1, p_2, p_3.

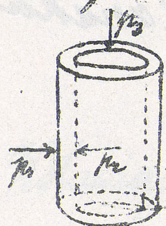


Fig 184.

ξ, η, ζ dadzą się wyrazić jako przesunięcia promienia wodzącego.

Nie trudno też rozwiązać deformacyę kuli wewnątrz pustej. Przesunięcia mogą się tu odbywać tylko w kierunku promieni kuli.

$$\xi = \varphi(r)\frac{x}{r}$$

$$\eta = \varphi(r)\frac{y}{r}$$

$$\zeta = \varphi(r)\frac{z}{r}.$$

2. Ze wzorów ogólnych (l) można odnaleźć wypadki specyalne, z których doszliśmy do wzorów ogólnych.

Zakładając: $\xi = \varepsilon x$, a równocześnie na skurczenie

$$\eta = -\mu\varepsilon y, \quad \zeta = -\mu\varepsilon z$$

gdzie ε oznacza odkształcenie, zaś μ liczbę Poissona dostaniemy z (3)(l):

$$X_x = 2T\varepsilon + L\varepsilon(1-2\mu)$$

$$Y_y = -2T\varepsilon + L\varepsilon(1-2\mu)$$

$$Z_z = -2T\varepsilon + L\varepsilon(1-2\mu)$$

Siły ścinające X_y, Y_z, Z_x znikają. Równania (1), (l) są spełnione.

Wobec $T = \frac{E}{2(1+\mu)}$, $L = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$, będzie

$$X_x = \varepsilon\left\{\frac{2E}{2(1+\mu)} + \frac{(1-2\mu)E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\right\}$$

$$X_x = \varepsilon E.$$

Odpowiednio $Y_y = Z_z = 0$.

Są to wzory te same co stosowały się do pojedynczej kostki. Tutaj są one uogólnione do ciała o dowolnym kształcie.

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla sił ścinających. Znowu się dostanie wzory na odkształcenie ciała o dowolnym kształcie podobne jak dla kostki. Wystarczy założyć na przesunięcia wartości

$$\xi = \alpha y, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

3. Przejdziemy teraz do zagadnień trudniejszych. Rozważymy przedewszystkiem skręt walca.

Niech więc walec prosty o podstawie kołowej zdeformuje się w ten sposób, że górna jego podstawa skręci się o pewien kąt bardzo mały φ, dolna zaś zostanie niezmieniona. Odkształcenie to będzie

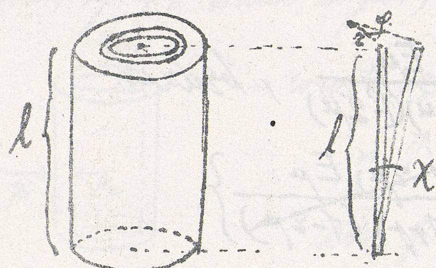


Fig 185.

już niejednorodne.

Zagadnienie to można traktować albo w sposób metodyczny tak jak wyżej zaznaczyliśmy albo bezpośrednio. Spróbujmy najpierw bezpośrednio. Uważajmy w tym celu wyjęte włókno z walca. Deformacyę, jakiej ono dozna można uważać powodu skręcenia bardzo małego za ścinanie. Wyrazimy ją tedy:

$$\xi = \frac{r\varphi}{l}$$

$$X_y = T\xi = T\frac{r\varphi}{l}$$ (siła działająca na jednostkę powierzchni włókna). Na przekrój zatem włókna $r\,dr\,d\psi$ działać będzie siła:

$$r\,dr\,d\psi\cdot T\frac{r\varphi}{l}$$

Na całkowity zatem przekrój (poprzeczny) walca będzie działać siła:

$$\int r\,dr\,d\psi\, T\frac{r\varphi}{l}$$

Moment tedy całkowity wywołujący skręcanie walca będzie:

$$M = \int r^2 dr\, d\varphi\, T \frac{r\varphi}{l}$$

$$M = \frac{T\varphi}{l} \int_{r=0}^{a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3\, dr\, d\varphi = \frac{T\varphi}{l} \cdot \frac{a^4}{4} \cdot 2\pi.$$

$$M = \frac{\pi a^4 \varphi}{2l} \cdot T$$

Teraz zaś zastosujmy metodę. Trzeba więc uczynić pewne hipotezy co do ξ, η, ζ:

Bezpośrednio widzimy że odchylenie

$$\varepsilon = \varphi \frac{y}{l}$$

Co do η założymy że $\eta = 0$;

$$\xi = r \cdot \varepsilon \cdot \sin(rx) = \varepsilon z$$

$$\eta = -r \cdot \varepsilon \cdot \cos(rx) = -\varepsilon x$$

Fig 186.

Zasadnicze więc założenie będzie następujące:

$$\xi = \frac{\varphi}{l} yz$$

$$\eta = 0$$

$$\zeta = -\frac{\varphi}{l} xy$$

czyli znacząc $\frac{\varphi}{l} = c$ mamy:

$$\xi = cyz, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -cxy$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \;,\quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = cz \;,\quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = cy$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -cy \;,\quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -cx \;,\quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

Stąd:

$$X_x = Y_y = Z_z = 0$$

tj niema sił wydłużających.

$$X_y = Tcz \;,\quad Y_z = -Tcx \;,\quad Z_x = 0$$

Pozostaje jeszcze stwierdzić czy system ten sił jest możliwy. Wtym celu wstawiamy wartości wyszukane na siły do równań dynamicznych (1)(l). Łatwo się przekonać można, że są one spełnione.

Zwracając się do równań (2)(l) dostaniemy wyrażenia na siły na pobocznicy walca zaczepione:

$$X_s = Tcz \cos ny = Tcz \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$Y_s = Tcz \underbrace{\cos nx}_{\frac{\pi}{2}} - Tcx \underbrace{\cos nz}_{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$Z_s = -Tcx \cos(ny) = 0$$

Zatem na pobocznicę walca nie działają żadne

siły. Na przekrój natomiast działają następujące:

$$X_s = Tcz \cos 0 = Tcz.$$

$$Y_s = 0$$

$$Z_s = -Tcx.$$

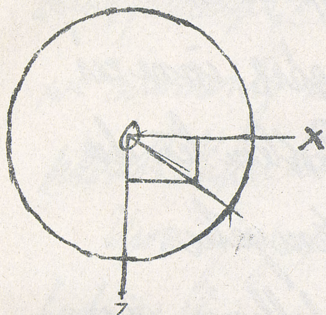


Fig 187

Kierunek siły wypadkowej będzie określony przez: $\frac{Z_s}{X_s} = -\frac{x}{z}$ tj siła wypadkowa będzie normalnie skierowana do promienia wodzącego. Wielkość jej będzie:

$$F = \sqrt{X_s^2 + Z_s^2} = Tcr$$

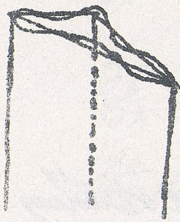
Wypadkowa wszystkich tych sił stycznych jest zero, ale moment wypadkowy nie jest zerem; będzie on

$$M = \int_0^a Tcr^2 . 2\pi r . dr = \frac{\pi a^4 \varphi}{2l} . T$$

Ostateczny zatem rezultat jest tensam, co wyżej bezpośrednio znaleziony.

Powyższe rozwiązania są ważne tylko dla walca kołowego. Gdyby walec miał przekrój inny niż kołowy, to już nie można by twierdzić, że $\eta = 0$.

Dokładną teoryę sprężystości dla ciał pryzmowatych podał Saint Venant. Dochodzi on do ciekawych rezultatów; pokazuje się, że pryzmy deformują się w ten sposób, że jedne partye np. kreskowane podnoszą się w górę, inne zaś obniżają się. Problem ten da się rozwiązać ogólnie przy pomocy teoryi potencyału.



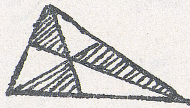


Fig 188.

4. Przegięcie belki. Wyobraźmy sobie belkę o jednakowym wszędzie przekroju. Do końców belki przyczepmy momenty M, któreby ją skręcały *) belka przyjmie kształt łuku a deformacya której ulegnie będzie niejednorodna. Górne partye belki się wydłużą dolne zaś skurczą się. W pośrodku zaś między temi partyami znajdzie się warstwa neutralna (włókno), która nie dozna ani skurczenia ani wydłużenia.

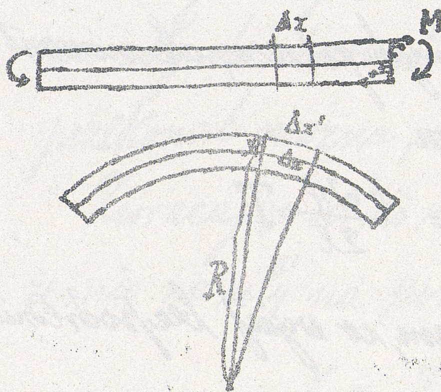


Fig 189.

*) nb. koło osi prostopadłej do długości.

Ażeby w belce istniała równowaga, widoczną jest rzeczą iż w każdym jej przekroju musi być moment jednakowy tylko przeciwnie skierowany niż na końcu. Łatwo to sobie uprzytomnić, gdy tylko wyobrazimy sobie w każdym z przekrojów belkę przeciętą. Z tego, że wszystkie przekroje mają jednakowe momenty wynika, że belka zdeformowana przyjmie kształt łuku koła.

Uważajmy teraz element belki Δx. Po deformacji będzie dlań zachodzić proporcja:

$$\Delta x' : \Delta x = R+y : R$$

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{y}{R}$$

Lecz $\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x}$ przedstawia wydłużenie procentowe włókna:

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{X_x}{E}$$

Stąd:

$$X_x = E\frac{y}{R}$$

Jest to siła ciągnąca dla każdego z włókien. Siły takie są rozmieszczone w całym przekroju. Wypadkowa ich jest zatem

$$\sum E\frac{y}{R}q$$

jeśli przez q oznaczymy element przekroju. Lecz ponieważ

niema żadnych sił zewnętrznych postępowych (są tylko momenty), bo w przeciwnym razie nie byłoby równowagi, zatem suma owa znika, a stąd wynika, że

$$\sum yq = 0$$

tj. dochodzimy do wniosku, że włókno normalne przechodzi przez środek masy.

Moment zewnętrzny, który przyczepiamy do końców belki, jest dany. Musi on być równy momentowi każdego przekroju. Znacząc go literą M dostajemy:

$$M = \sum \frac{E}{R} y^2 q = \frac{E}{R} \sum y^2 q = \frac{E}{R} \Theta$$

jeśli przez Θ oznaczymy moment bezwładności przekroju (około osi przełożonej przez włókno neutralne). Stąd

$$R = \frac{E\Theta}{M}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E\Theta}$$

tj. belka będzie tem więcej wygięta im większy będzie moment siły a im mniejszy będzie moment bezwładności przekroju. Tem mniej się zaś belka wygnie przy danym momencie M im moment Θ jest większy. $E\Theta$ jest zatem ——

miarę sztywności czyli wytrzymałości na wygięcie. Wyciąga się z tych rozwiązań praktyczne wnioski i buduje

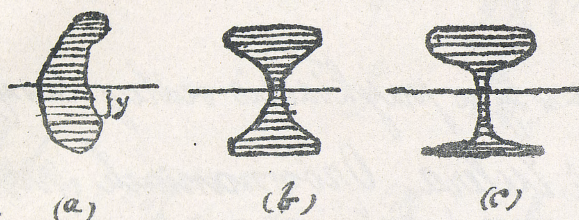
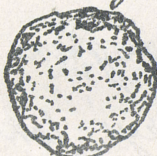


Fig 190.

się trawersy, szyny kolejowe w kształcie mniej więcej jak pod (b) i (c), tak aby moment bezwładności był możliwie duży, a nie tak jak pod (a). Fig 190.

Podobnie jest w kościach zwierząt; największa masa zagromadzona jest na obwodzie.


Fig 191

Przy wygięciu w różnych kierunkach będą momenty bezwładności różne, a stąd będą też różne zakrzywienia.

Uważajmy belkę o przekroju prostokąta o bokach b i c.

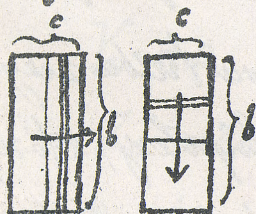


Fig 192.

$$\frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\theta_1} : \frac{1}{\theta_2}$$

$$\theta_1 = 2\int_0^{\frac{c}{2}} b\, z^2 dz = 2\frac{bc^3}{24} = bc\,\frac{c^2}{12}$$

$$\theta_2 = 2\int_0^{\frac{b}{2}} c\, y^2 dy = 2\,\frac{cb^3}{24} = bc\,\frac{b^2}{12}$$

stąd $\frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} = b^2 : c^2$

tj wytrzymałość belki o przekroju prostokątnym jest wprost proporcyonalna do kwadratu boku w kierunku którego nastąpiło wygięcie.

Dotąd postępowaliśmy w tym przykładzie według dawnej teoryi J. Bernoulliego i Eulera. O równaniach sprężystości nie było mowy. Według Saint Venanta teorya ta okazała się niedokładna. Założenie uczynione tutaj, że cała deformacya odbywa się tylko w płaszczyźnie jednej jest nieuzasadnione. Deformacya następuje bowiem też w kierunku poprzecznym w ten mianowicie sposób, że górne włókna muszą się skurczyć dolne zaś rozszerzyć tak że przekroje przed i po deformacyi będą mniej więcej wyglądać jak wskazuje Fig 193.



Fig 193.

Zwróćmy się więc do ogólnej teoryi. Znowu trzeba uczynić podobnie jak przy skręcie walca pewne hipotezy, które potem trzeba uzasadnić. Tutaj wprowadzając układ w sposób taki, jaki przedstawia rycina 194 uczynimy następujące

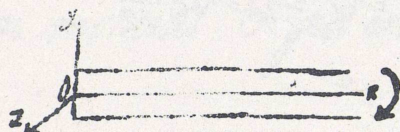


Fig 194.

przyjęcia:

$$\xi = -\frac{yx}{R}$$

$$\eta = \frac{1}{2R}\left(x^2+\mu y^2-\mu z^2\right)$$

$$\zeta = \frac{\mu}{R} yz$$

Stąd

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{R}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{x}{R}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\mu y}{R}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\mu z}{R}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\mu z}{R}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\mu y}{R}$$

Obliczając według wzorów (1) siły, mamy:

$$X_x = -2T\frac{y}{R} - L\frac{y}{R}(1-2\mu) = -\frac{Ey}{R}$$

$$Y_y = 2T\frac{\mu y}{R} - L\frac{y}{R}(1-2\mu) = 0$$

$$Z_z = 0$$

$$X_y = T\left(-\frac{x}{R}+\frac{x}{R}\right) = 0$$

$$Y_z = 0$$

$$Z_x = 0$$

Okazuje się zatem, że żadne siły inne nie działają prócz ciągnących w kierunku x. Jest to wniosek, któryśmy przed-

tem bezpośrednio otrzymali (str 331). System też sił spełnia oczywiście równania dynamiczne (1/k), bo $\frac{\partial X_x}{\partial x} = 0$.
Co do sił na powierzchni działających, to widzimy też, że nie trzeba ich przyczepiać. Jedyne wręcz te występujące siły są przyczepione do przekrojów. Tak rozwiązaliśmy w racyonalny sposób owę deformacyę. Zostaje jeszcze pytanie, jaki kształt przyjmie belka.

Wobec $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{x}{R}$ jest $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{R}$.

Ze wzoru na krzywiznę:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

opuszczając $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ jako wielkość nieskończenie małą wobec 1, mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

skrzywienie belki w płaszczyźnie xy.

Wobec $\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\mu z}{R}$ jest $\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{R}$

Zatem krzywizna w płaszczyźnie yz jest:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{\mu}{R}$$

$$R_z = \frac{R}{\mu}$$

Wzór ten ostatni można użyć do oznaczenia czynni-

ka Poissona μ. Uskuteczniamy to w ten sposób że zmierzymy promienie krzywizny R i R_2. Pomiary takie można wykonać różnymi sposobami. Jeden np. zapomocą prążków Newtona pochodzi od Mallocka, który podał też cały szereg liczb dla różnych ciał.

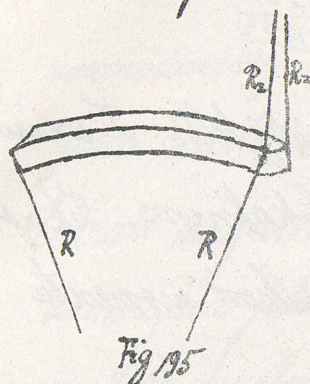


Fig 195

Możnaby się jeszcze zapytać przy wygięciu belki o zmianę nachylenia końcowego: $\Delta\varphi$. Jeśli długość belki oznaczymy przez a to : $a = R\Delta\varphi$.

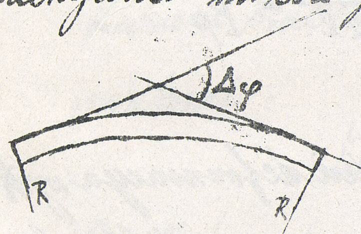


Fig 196

Wobec wzoru: $\frac{1}{R} = \frac{M}{E\Theta}$ jest

$$\Delta\varphi = \frac{a}{R} = \frac{Ma}{E\Theta} = \frac{Ma}{E\frac{b^3c}{12}}$$

Ten sam wzór można uogólnić do belek i prętów skrzywionych już z początku. Skrzywioną już bowiem belkę można rozłożyć na elementy, z których każdy można uważać za belkę prostą. Sumując skrzywienia końcowe elementarne powstałe skutkiem dalszego wygięcia takiej belki, dostajemy

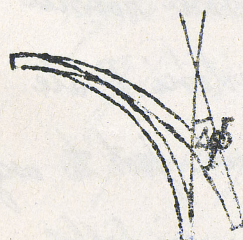


Fig 197.

skrzywienie wypadkowe:

$$\Delta\Phi = \Sigma\Delta\varphi = \frac{M}{E\frac{b^3c}{12}}\Sigma a = \frac{Ml}{E\frac{b^3c}{12}}$$

jeśli przez l naznaczymy całą długość wygiętej belki. To ważne jest zatem dla sprężyny o przekroju prostokątnym. Tak np.

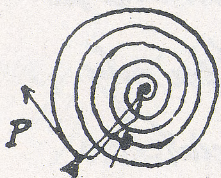


Fig 198.

dla sprężyny zegarka wielkość momentu będzie: $M = pP$.

Przy skręceniu o kąt $\Delta\varphi$ wystąpi zaś według wzoru moment:

$$M = \Delta\varphi \cdot \frac{Eb^3c}{12l} = Pp$$

Tak więc doszliśmy do teoryi sprężyny.

5. Teraz przejdziemy do przykładu, gdzie deformacya występuje nie przez moment lecz siłę postępową np. belka lewym końcem wmurowana w ścianę, na prawy zaś działa siła P.

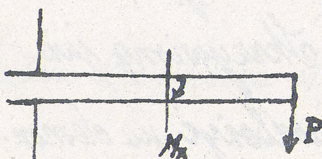


Fig 199.

By była równowaga musi siłę P przeciwdziałać siła inna równa co do bezwzględnej wartości P ale przeciwnie skierowana. Jest to osiągnięte przez wmurowanie belki w ścianę. Lecz te obie siły $P\downarrow$ i $P\uparrow$ tworzą parę sił, i za-

tem, aby istniała równowaga musi istnieć moment

$$M_0 = Pl$$

równoważący działanie pary sił.

Jaka nastąpi deformacya? Od czasów Bernoulliego i Eulera argumentuje się tak: Wyobraźmy sobie belkę w miejscu jakiemś przeciętą. Aby odcięty kawał nie odbierał się trzeba przyczepić moment:

$$M_x = P(l-x)$$

i prócz tego siłę postępową $P\uparrow$.

Zważać będziemy tylko na deformacye spowodowane momentami:

$$M_x = \frac{E\Theta}{R_x} = P(l-x).$$

O siłach postępowych*) zamilcza się, bo gdyby się chciało je uwzględnić to byłoby to znaczną komplikacyą. Wpływ ich zresztą jest nieznaczny. Ściśle atoli biorąc trzebaby to uzasadnić.

Gdy się bierze pod uwagę grubsze belki, to pokazuje się, że przekroje belek po deformacyi nie są płaskie. Ta jednak zajmiemy się tylko belkami cienkiemi, tak że na to nie będziemy zwracać uwagi.

*) ścinających V_x, które muszą powstać w przekrojach,

Zapytamy się teraz o kształt belki po deformacyi. Krzywizna w punkcie x będzie:

Fig 200

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Pomijając $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ jako wielkość znikomo małą wobec 1, mamy

$$\frac{1}{R_x} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

oraz

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x).$$

Całkując to ostatnie równanie, mamy:

$$E\Theta\frac{dy}{dx} = P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \alpha$$

$$E\Theta\eta = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \alpha x + \beta.$$

α, β stałe całkowania oznaczymy z warunków początkowych. W przekroju początkowym wychylenie $\eta = 0$, oraz nachylenie osi $\frac{dy}{dx} = 0$, bo belka jest wmurowana. Stąd wynika, że

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0;$$

a więc:

$$E\Theta\eta = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Jest to równanie zdeformowanej belki. Równanie to jest 3go stopnia. Wychylenie belki końcowe będzie:

$$\eta_l = \frac{Pl^3}{3E\Theta} = \frac{4Pl^3}{Eb^3c}$$

tj wychylenie belki o przekroju prostokątnym jest proporcyonalne do 3^{ciej} potęgi długości.

Nachylenie zaś końcowe:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_l = \frac{Pl^2}{2E\Theta}$$

tj nachylenie wzrasta z kwadratem długości.

6. Jeśli belka jest podparta przy obu końcach, a siła P działa w środku, to deformacyę jej zredukujemy do deformacyi belki wmurowanej jednym końcem w ścianę. Wychylenie bowiem i nachylenie w środku możemy uważać za równe zeru,

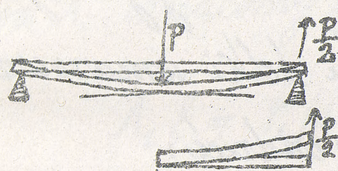


Fig 201

końcowe zaś wychylenie można uważać za wywołane siłą $\frac{P}{2}$. Stosując wzory poprzednie i wstawiając za l wartość $\frac{l}{2}$, za P zaś $\frac{P}{2}$, mamy:

$$y_{\frac{l}{2}} = \frac{2P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{Eb^3c} = \frac{Pl^3}{4Eb^3c}$$

Strzałka więc zgięcia, tak bowiem nazywamy wychylenie $y_{\frac{l}{2}}$, będzie w tym razie 16 razy mniejsze niż strzałka belki wmurowanej jednym końcem.

Podobnie jak to zagadnienie da się też zredukować zagadnienie, gdy belka jest oboma końcami wmurowana w ściany, a w środku wywarty jest na nią nacisk P. Wy-

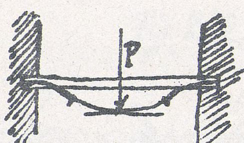


Fig 202

starczy belkę podzielić sobie na 4 części i wziąć jedną pod uwagę; deformacya tej czwartej części będzie stanowił analogon do belki wmurowanej jednym końcem w ścianę. Wychylenie środka belki wmurowanej oboma końcami będzie, jak łatwo widzieć:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = 2\,\frac{2P\left(\frac{l}{4}\right)^3}{E\,b^3c} = \frac{P\,l^3}{16\,E\,b^3c}.$$

Jest to już 64 część wychylenia belki jednym końcem wmurowanej.

7. W dotychczasowych rozważaniach deformacyi belki dwoma końcami podpartej lub utwierdzonej sprawa była ułatwiona z powodu symetryi. Jak jednak postąpić

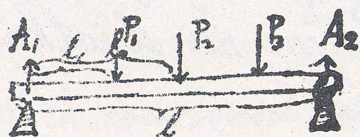


Fig 203

w ogólnym wypadku, gdy na belkę podpartą działa kilka sił jak bądź rozmieszczo-

nych? System sił P_1, P_2, P_3.. równoważą siły podparcia A_1, A_2. Będzie mianowicie:

$$A_1 + A_2 = P_1 + P_2 + P_3 + ...$$

Muszą się nadto równoważyć momenty. Chcąc to powiedzenie nasze zapisać matematycznie, obierzmy oś obrotu np w 0, odległości zaś zaczepienia sił P_1, P_2... od A_1 oznaczmy $l_1, l_2, ...$, długość zaś całej belki l. Będzie:

$$A_1 l = P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2) + P_3(l - l_3) + ..$$

Kombinując te oba równania możemy obliczyć siły A_1 i A_2.

Weźmy w tym celu przykład, iż jedna tylko siła P zaczepia w dowolnym punkcie belki. Będzie:

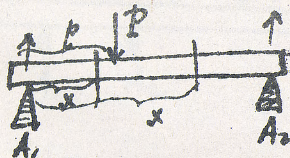


Fig 204.

$$A_1 + A_2 = P \qquad A_2 = \frac{Pp}{l}$$

$$A_2 l = Pp \qquad A_1 = P\left(1 - \frac{p}{l}\right)$$

Znamy tak już siły. Jaka będzie deformacya? Wyobraźmy sobie belkę w jakimś punkcie x odciętą. Jakie momenty trzeba przyczepić, aby się belka

nie odłamała? Będą one

$$M_x = A_1 x \quad \text{lub} \quad M_x = A_1 x - P(x-p)$$

zależnie od tego, który punkt bierzemy pod uwagę, czy po lewej czy po prawej stronie siły P. W każdym razie ważne będzie wyrażenie:

$$M_x = E\Theta \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

W pierwszym razie dostajemy stąd:

$$E\Theta\eta = A_1 \frac{x^3}{6} + \alpha x + \beta$$

w drugim:

$$E\Theta\eta = A_1 \frac{x^3}{6} - P\frac{x^3}{6} + Pp\frac{x^2}{2} + \alpha' x + \beta'.$$

Oba te wyrażenia nie są od siebie niezależne, albowiem dla $x=p$ musi być: $\eta = \eta'$, $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta'}{dx}$.

$$\frac{d\eta}{dx} E\Theta = \frac{A_1 x^2}{2} + \alpha \quad ; \quad \frac{d\eta'}{dx} E\Theta = \frac{A_1 x^2}{2} - \frac{Px^2}{2} + Ppx + \alpha';$$

Kładąc więc $x=p$, dostaniemy:

$$\alpha = -\frac{Pp^2}{2} + Pp^2 + \alpha'$$

$$\alpha' = \alpha - \frac{Pp^2}{2}.$$

tj. α' wyraża się przez α. Podobnie dojdziemy do

wniosku, że β' wyrazi się przez β i α. Tak więc liczba 4 stałych całkowania zredukuje się do 2, bo pozostałe dwie wyrażą się przez poprzednie. Te zaś ostatnie dadzą się wyrazić z warunków początkowych. Nie będziemy już w to szczegółowo wchodzić.

Zagadnienie to jest rzeczywiście ogólniejsze i daje zagadnienie poprzednie, gdy na belkę podpartą na końcach działa siła zaczepiająca w środku jako wypadek szczególny. Jest ono ważne dla techników. (Wieloboki sznurowe, konstrukcye graficzne).

Ogólniejsze znowu od tu rozpatrzonego zagadnienia jest następujące: Znaleźć deformacyę belki w różnych punktach dowolnie podpartej na którą również w różnych dowolnych punktach działają siły. Siły $A_0, A_1, A_2, \dots$ jakie wywiera-

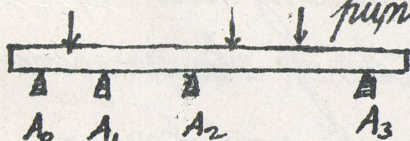


Fig 205

ją podpory nie są znane a priori, bo zależą one od reakcyi. Postępuje się w sposób analogiczny jak poprzód. Wiadomo się, że siły muszą być równe, momenty takżesamo. Ale

to jeszcze nie wystarcza. Oblicza się krzywą i znajduje się warunki nieokreślone. Dodaje się tu znowu warunek, że w miejscach podparcia wychylenia muszą być = 0. Zagadnienie to jest ważne dla trawers.

Zauważymy tu jeszcze, że wyrażenie na skrzywienie

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E\Theta}$$

jakiegośmy nie jednokrotnie używali w poprzednich

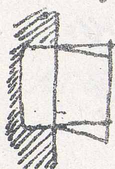


Fig 206

przykładach jest tylko przybliżone. O ile bowiem mielibyśmy belkę bardzo grubą i bardzo krótką, to wtedy nastąpi właściwie ścinanie.

8. Wygięcie belki skutkiem siły działającej w kierunku długości belki. Z doświadczenia możemy wiedzieć, że

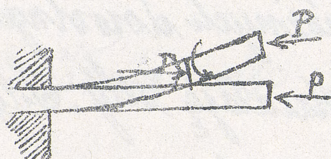


Fig 207

chociaż nie istnieje siła przeginająca tylko siła naciskająca w kierunku długości belki, belka jednym końcem zamurowana w ścianę z początku się skurczy nieco, a gdy nacisk jest znaczniejszy belka się wygnie. Chodzi o to, by to

ująć w formę matematyczną. Wyobraźmy sobie w tym celu belkę odciętą w jakiemś miejscu. By była równowaga, trzeba przyczepić w tem miejscu siłę postępową równą sile P i moment, równy istniejącemu już. Jeśli wychylenie końcowe naznaczymy η_l, zaś w punkcie x literą η_x, to moment wspomniany będzie:

$$M_x = P(\eta_l - \eta_x)$$

Krzywiznę wyrazimy tedy:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{M_x}{E\Theta} = \frac{P(\eta_l - \eta_x)}{E\Theta}$$

Wobec $\frac{1}{R_x} = \frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \sim \frac{d^2\eta}{dx^2}$ w razie $\frac{d\eta}{dx} \sim 0$

mamy:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{P}{E\Theta}(\eta_l - \eta_x)$$

Kładąc $\eta_l - \eta = y$, mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta}y$$

Tak dostaliśmy równanie różniczkowe określające kształt belki po deformacji. Jest to znany typ równania, spotykany przy wahadle wogóle ruchu drgającym. Rozwią-



zanie tedy jego będzie:

$$y = a \sin(\alpha x + \varepsilon) \quad , \quad \alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

$$y = a \sin\left(\varepsilon + x\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right).$$

stałe całkowania a i ε.

$$\eta = \eta_e - a \sin\left(\varepsilon + x\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right)$$

Dla wyznaczenia stałych całkowania, zwracając się do warunków początkowych powiemy:

dla $x=0$, ma być $\eta=0$, $\frac{d\eta}{dx}=0$; stąd

$$0 = \eta_e - a \sin\varepsilon$$

oraz wobec $\frac{d\eta}{dx} = -a\sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \cos\left(\varepsilon + x\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right)$

$$0 = -a\sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \cos\varepsilon$$

Stąd wynika, że a musi być $\neq 0$, $\cos\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, zatem $a = \eta_e$; dostajemy więc:

$$\eta = a\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right)\right)$$

czyli wreszcie

$$\eta = a\left(1 - \cos x\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right)$$

gdzie tylko amplituda a zostaje jednak nieokreślona. Pomijając to możemy zdać sobie sprawę z kształtu belki.

Dla $x=0$, jest $\eta=0$; dla $x=l$ jest $\eta=a$.

$$\cos l\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}=0$$

$$l\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}=\frac{\pi}{2}$$

$$P=\frac{E\Theta\pi^2}{4l^2}.$$

Cossinusoida przedstawi kształt belki w pierwszej swej ćwierci. Będzie on więc taki, jak wskazuje ryc. 208. Krzywą od 0 do l. Będzie to więc część cossinusoidy.

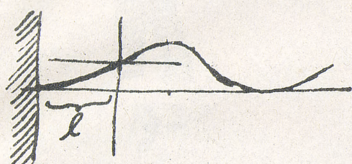


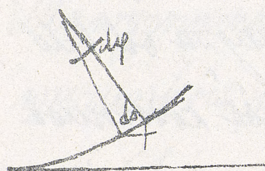
Fig 208

Ostatnie równanie daje nam ciekawy rezultat; podaje ono bowiem siłę przy jakiej deformacya wspomniana belki nastąpi. Natomiast wychylenie końca belki a nie jest wcale określone. Rzecz ta wyjaśnia się z warunków fizycznych. Jak długo siła jest mniejsza od wartości granicznej, to nie wystarczy ona do wytworzenia cossinusoidy; belka kurczy się według prawa Younga. Gdy atoli siła wzrośnie do tej wartości, pręt wygnie się, gdy zaś siła wzrośnie jeszcze cokolwiek ponad wartość granicz-

ną wygięcie staje się nieskończenie wielkie i w praktyce na-
stępuje złamanie belki.

Zarzucić można powyższemu rachunkowi to, że zakła-
damy, iż $\frac{dy}{dx}$ jest znikomo małe; gdy się tego ograniczenia nie wprowadza dostaje się f. eliptyczną. Jest bowiem tak:

$$\frac{1}{R} = \frac{P}{E\Theta}(\eta_e - \eta)$$



$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{P}{E\Theta}(\eta_e - \eta)$$

Fig 208.

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{P}{E\Theta}\frac{d\eta}{ds} = -\frac{P}{E\Theta}\sin\varphi.$$

Znowu mamy równanie takie samo jak dla wahadła. Dla małych φ wracamy do poprzedniego wypadku przybliżonego.

Przy rozwiązaniu powyższego przykładu mieliśmy po raz pierwszy do czynienia z niestałością równowagi. Możliwa jest deformacya taka, iż belka tylko się skurczy, a nie wygnie; gdy atoli siła przejdzie granicę równowaga taka jest niestała. W tych więc razach trzeba rozważyć czy mamy do czynienia z równowagą stałą czy niestałą.

Można podać masę przykładów tego rodzaju: Gdy zginamy

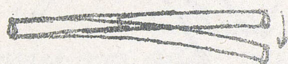


Fig 209

rurę (np. źdźbło), to może ona zachować swój kształt kołowy, atoli stalsza jest równowaga, gdy się spłaszczy. Gdy skręcamy walec kauczukowy, to możliwą

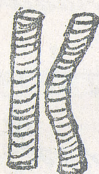
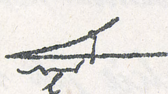


Fig 210

jest rzeczą, iż zachowa on kształt prosty, stalsza jednak jest równowaga, gdy walec taki się skrzywi.

Rozważania nad stałością równowagi (Bryan) są bardzo trudne. Nie będziemy w to tutaj wchodzić. Wspomnimy tu jeszcze, nawiązując rzecz do naszego przykładu, że z kwestyą stałości zgadza się deformacya belki na którą działa siła w kierunku jej długości tylko w jednej ćwiartce. Nie można więc kreślić cossinusoidy w do-



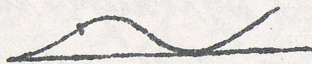


Fig 211.

wolnej ilości ćwiartek i mówić, że to przedstawia kształt zdeformowanej belki. Gdy się ma do czynienia z deformacyą belki wmurowanej obuma końcami w ściany, które zbliżając

się do siebie powodują deformacyę owę, to zgodnie ze stałości ą równowagi belka przyjmie kształt

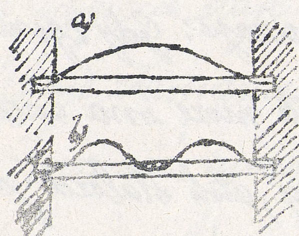
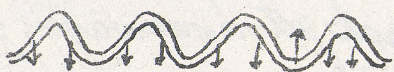


Fig 212.

Fig 212 a). Pozycya belki Fig 212 b) nie ma już równowagi stałej.

W związku z temi rzeczami pozostaje problem geofizyki powstawania gór fałdowych skutkiem kurczenia się skorupy ziemskiej.


Fig 213.

Pozornie jest sprzeczność, bo zdawałoby się, że ukształtowanie takie miałoby równowagę niestałą. Trzeba jednak zważyć, że warunki tutaj są odmienne. Jest to w związku z izostazyą, według której góry zachowują się tak jakby to były bryły lodu pływające na wodzie. Gdy sobie tak rzecz wyobrazimy, to do znanych ciśnień dołączać się będzie jeszcze ciśnienie hydrostatyczne. Wtedy istotnie wykonując rachunki dochodzimy do wniosków, że ukształtowanie takie jak na Fig. 213 ma równowagę stałą. Doświadczalnie to można stwierdzić skurczając warstwę żelatyny pływającej

na powierzchni ptycii.

9. Jaka będzie deformacya belki, gdy wywierać będziemy na nią nacisk w sposób ciągły t.j. jeśli na każdy cm przypadać będzie siła P_x. Rozważać będziemy taksamo

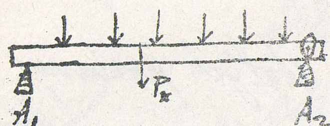


Fig 214.

jak w przykładzie 7. Powiemy więc, że muszą się równoważyć siły i momenty, że więc

$$A_1 + A_2 = \sum P_\xi$$

$$M_x = A_1 x - \sum P_\xi d\xi (x-\xi)$$

czyli zastępując sumę przez całkę:

$$M_x = A_1 x - \int_0^x P_\xi (x-\xi)\, d\xi$$

t.j. wobec $M_x = \frac{E\Theta}{R_x} = E\Theta \frac{d^2y}{dx^2}$

$$M_x = E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = A_1 x - \int_0^x P_\xi (x-\xi)\, d\xi$$

Stąd

$$\frac{dM_x}{dx} = A_1 - \left. P_\xi (x-\xi) \right|_{\xi=0}^{\xi=x} - \int_0^x P_\xi\, d\xi$$

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = -P_x$$

czyli

$$E\Theta \frac{d^4y}{dx^4} = -P_x$$

Jeśli w szczególności założymy $P_x = \text{const}$, co oznaczy-

wiśtnione będzie np. w tym razie, gdy na belkę o jednakowym wszędzie przekroju działa ciężkość, to

$$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = -q s g$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{q s g}{E\Theta}$$

$$y = -\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 - \frac{q s g}{E\Theta}\frac{x^4}{4!}$$

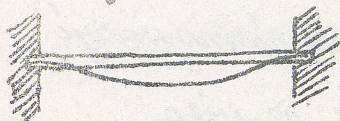


Fig 215

Dla określenia stałych podamy np. warunki początkowe, że dla $x=0$, $x=l$ musi być $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$.

Dostaniemy tak 4 równania; te wystarczą już do oznaczenia krzywej. Krzywa ta jest 4^go^ stopnia.

Gdybyśmy rozważali deformacyę płyty sprężystej, na którą działają siły w kierunku osi y: Y_{xz}, dostalibyśmy na jej kształt równanie:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) = A Y_{xz}$$

zj

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = A Y_{xz}$$

Jest to analogon do zagadnienia poprzedniego. Gdyby rozmieszczenie sił nie było tutaj zależne od osi z, to

to równanie redukowałoby się na poprzednie. W praktyce napotykamy również to równanie. Kształt błon zależy od równań różniczkowych 2go rzędu.

Inny jeszcze przykład ciekawy rozwiązany w sławnej rozprawie teoretycznej Hertza dotyczy deformacyi występującej przy ściśnieniu dwu kul. Kule się spłaszczą, a promień płaszczyzny zetknięcia będzie

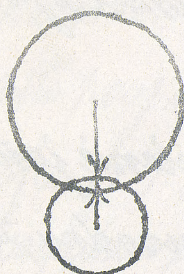


Fig 216.

$$R \sim \sqrt[3]{p\varkappa}$$

Jeszcze jeden szczegół podniesiemy tutaj: Teoryę sprężystości nazywają również technicy nauką o wytrzymałości. Jest "Festigkeitslehre". Związek między temi rzeczami jest dosyć luźny. Używa się bowiem w tej nauce wzorów z teoryi sprężystości, ale nie polega się na tem, bierze się wytrzymałość 4-10 razy większą.

Problem wytrzymałości jest dotychczas nierozwiązany. Np. sądzono, że przerwanie belki nastąpi wtedy, gdy siła ciągnąca przekroczy pewną granicę. Byłoby to o tyle słuszne

o ileby istniały wyłącznie siły ciągnące belkę podłużnie, ale nie w wypadkach gdzie współistnieją różne inne siły. Inna hipoteza, że miarodajną dla wytrzymałości jest największe naprężenie ciągnące w danym punkcie jest niewątpliwie fałszywa.

Tosamo odnosi się do ciśnienia. O ile ciśnienie jest ze wszystkich stron jednakowe a materyał jednorodny, to nie nastąpi ani pęknięcie ani złamanie.

Inne kryteryum wytrzymałości podał Poncelet, Saint-Venant, Grashof opierające się na rozważaniu największego wydłużenia. Jeśli mianowicie wydłużenie przekroczy pewną wartość maxymalną, to wtedy następuje przerwanie. Lecz natrafia się tu znowu na trudności tesame. Zatem od dawna bo już od czasów Coulomba postawiono inną hipotezę powiadającą, że przerwa ciągłości: złamanie zależy od dwu napięć istniejących w danym punkcie maxymalnego i minimalnego. Otóż powiadał się: Przerwanie nastąpi wtedy, jeśli różnica napięć największych i najmniejszych w danym punkcie przekroczy pewną

granicę. Doświadczenia w tym względzie czynił Voigt. Stwierdził on, że przerwanie słupa stearyny następuje pod równomiernem ciśnieniem hydrostatycznem przy tem samem obciążeniu jak na powietrzu wolnem. Williams czyniąc próby nad przerwaniem drutów aluminiowych stwierdził, że przerwanie ich na wolnem powietrzu nastąpiło przy obciążeniu 13·6 $\frac{kg}{mm^2}$, zaś przy ciśnieniu 700 atmosfer tj 7 $\frac{kg}{mm^2}$ przy obciążeniu 13·8 $\frac{kg}{mm^2}$. Zatem nie bezwzględna wartość siły Y_y tylko obciążenie tj. różnica siły ciągnącej w kierunku Y i siły poprzecznej (ciśnienia hydrostatycznego) była miarodajną dla złamania.

Deformacya wogóle według Karmanna może się odbywać w dwa sposoby: albo ziarnka ciała doznają przesunięcia, albo zostają przekształcone. Teorya ta zbliża się najwięcej do teoryi Coulomba posiadającej, że złamanie następuje wtedy, gdy największa zmiana kątów przestąpi pewną miarę maxymalną lub gdy ścinanie przestąpi pewne maximum. Ubocznie wspomnimy, że również Mohr podał kryteryum wytrzymałości

nie mające atoli wyższości nad poprzedniem. Nazywać teoryę sprężystości nauką wytrzymałości jest, jak już z tego wszystkiego wynika, niewłaściwem, bo nie mamy jeszcze dotąd podstaw dla określenia wytrzymałości.

Literatura teoryi sprężystości: Föppl: Technische Mechanik T. III. V, Jeśniewicz, Neumann, Love (klasyczne).

KONIEC.

≡Spis rzeczy≡

II.



Wydawnictwo Kółka matematyczno-fizycznego we Lwowie.

Autor	Tytuł	Dla członków	Dla nieczł.
Prof. W. Sierpińskiego.	Teorya liczb niewymiernych	1·60 K	2 K
	Teorya nieskończonych szeregów i iloczynów	2·20 „	2·70 „
	Teorya liczb zespolonych	0·40 „	0·50 „
	Teorya arytmetyczna kwaternionów	0·80 „	0·80 „
	Teorya liczb	5 „	6·50 „
	Teorya mnogości	2·80 „	3·20 „
	Wstęp do teoryi funkcyi	0·70 „	0·80 „
	Analiza wyższa	5·40 „	6·30 „
	Rachunek sumacyjny	1·60 „	1·90 „
	Zastosowanie teoryi mnogości do Analizy	4·30 „	5 „
Prof. Smoluchowskiego	Elektryczność i magnetyzm	8 „	10 „
	Nowe teorye elektryczności	6 „	7·50 „
	Teorya kinetyczna gazów	5 „	7 „
	Termodynamika	8 „	10 „
	Mechanika	6·30 „	9 „



